

Analogieversuche zur Gravitationswellendetektion - Theorie und Vorbereitung -

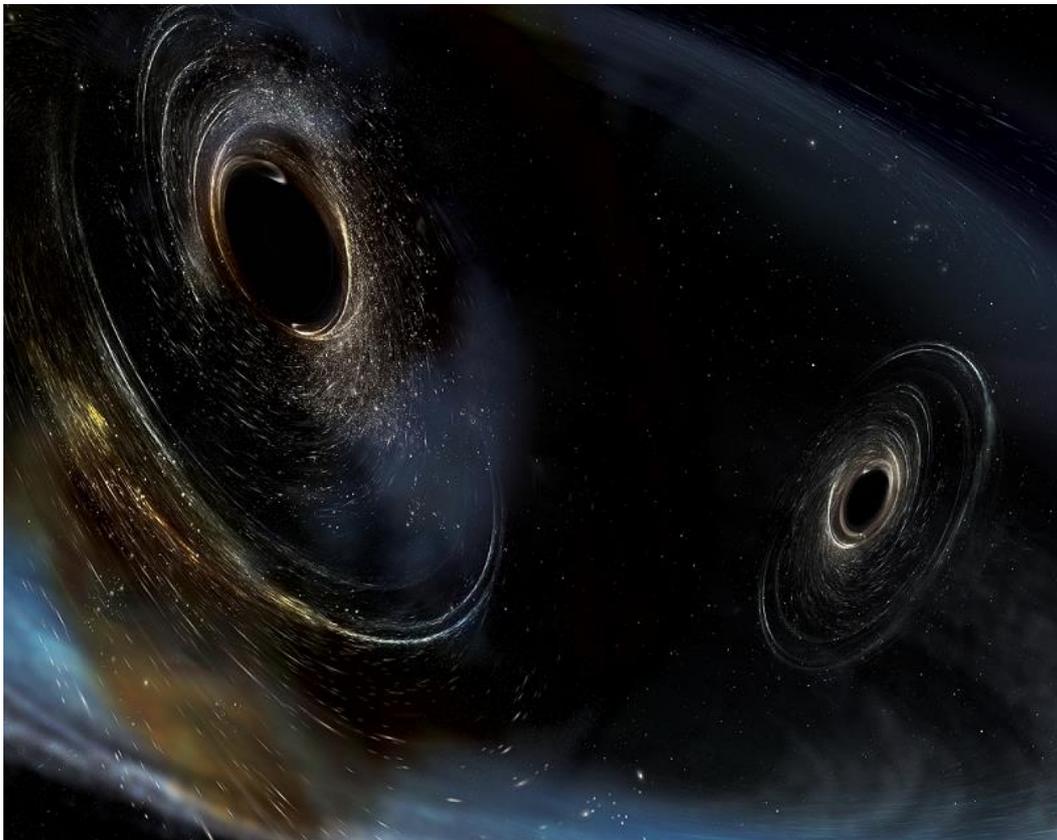


Bild: <https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20170601b>

Aktualisierte Fassung Februar 2021
Ursprüngliche Version von Max Winter, November 2016

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	2
2. Theoretischer Hintergrund	3
2.1 Natur und Eigenschaften von Gravitationswellen	3
2.2 Entstehung und astronomische Quellen von Gravitationswellen	6
2.3. Detektion von Gravitationswellen	7
2.3.1. Historischer Überblick	7
2.3.2. Michelson-Interferometer	8
2.3.3. Fabry-Perot-Interferometer	10
2.3.4. Michelson-Fabry-Perot-Interferometer	12
2.4. Diskussion des Analogieexperimentes mit Schallwellen	14
2.5. Datenanalyse in der Gravitationswellendetektion – die Korrelationsmethode („matched filtering“)	19
Anhang	
Entstehung von Gravitationswellen - Multipolentwicklung	20
Literaturverzeichnis	22

1. Einleitung

Der 14. September 2015 ist auf der Homepage des LIGO Laboratory visuell hervorgehoben. Dahinter steht:

During an engineering test a few days before the first official search begins, Advanced LIGO detects strong gravitational waves from collision of two black holes. [3]

Diese Beobachtungen wurden am 11. Februar 2016 in einer Pressekonferenz mitgeteilt und weltweit in diversen Medien gemeldet. So kamen nicht nur Fachleute mit den Ergebnissen in Kontakt, sondern auch Laien lasen Mitteilungen wie die Folgende von Zeit Online.

Einstein hatte recht - Gravitationswellen entdeckt, Einsteins große These, bewiesen. Jetzt können Sie es glauben. [Lü16]

2017 wurde schließlich der Nobelpreis für Physik an Rainer Weiss, Barry C. Barish und Kip. S. Thorne für ihre entscheidenden Beiträge zum LIGO-Detektor und der Beobachtung von Gravitationswellen verliehen¹.

Das öffentliche Interesse an der Detektion von Gravitationswellen ist hoch. Das liegt auch daran, dass sie in Zusammenhang steht mit den öffentlichkeitswirksamen Stichwörtern „Schwarze Löcher“, „Einstein“ und „Relativitätstheorie“. Für Physiker und besonders für Physiklehrer ist ein grundlegendes Wissen zu Gravitationswellen und ihrer Detektion daher unabdingbar. Die Idee hinter diesem Versuch ist es, einen Einblick in die relevante Theorie zu bieten und Experimente zum Verständnis der Detektionstechnik durchzuführen. Es werden dazu zunächst die grundlegenden Eigenschaften des Michelson-Interferometers und des Fabry-Perot-Interferometers sowie deren Kombination ermittelt. Auf dieser Basis werden Analogieexperimente aufgebaut.

Die Versuche sollen zeigen, dass Interferometer in der Lage sind, extrem kleine Längenänderungen weit unterhalb von typischen Wellenlängen zu messen. Um die Anschaulichkeit zu steigern, soll die Längenänderung, welche das Interferometer detektiert, ebenfalls von einem Wellenphänomen hervorgerufen werden. Schallwellen sind dafür besonders geeignet, da sie einfach erzeugt werden können und in der Lage sind, optische Bauteile mechanisch in Schwingung zu versetzen. Weiterhin können sie, bei den für Gravitationswellen typischen Frequenzen, von Menschen akustisch wahrgenommen werden.

Das Ziel dieses Versuches ist es somit, nach dem Vorbild der Gravitationswellendetektoren, Interferometer-Konstruktionen aufzubauen und zu vergleichen, welche in der Lage sind ein Tonsignal, das von einem neben dem Aufbau stehenden Lautsprecher erzeugt wird, zu detektieren.

Zur **Vorbereitung** auf den Versuchstag sollten die Fragen 1 - 9, welche in Kapitel 2 jeweils am Ende der Abschnitte aufgeführt sind, beantwortet werden.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1. Natur und Eigenschaften von Gravitationswellen

Gravitationswellen werden in vielen Veröffentlichungen als *Rippel in der Raumzeit* bezeichnet. Zum Beispiel in [Dan93], [Far12], [Bla05] und [D'I04]. Um zu verstehen was damit gemeint ist muss das Konzept der Raumzeit und ihrer Metrik in der Relativitätstheorie betrachtet werden. In Newton'scher Mechanik werden Orte in kartesischen Koordinaten durch den dreidimensionalen Vektor \vec{r} und Zeiten mit dem Skalar t beschrieben. Der Ortsvektor in der Relativitätstheorie ist ein Vierervektor, wobei die Zeit als 0-te Komponente mit c multipliziert wird, um die Dimension einer Länge zu haben.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Die Komponenten dieses Vektors werden mit 0 bis 3 bezeichnet und durch griechische Indizes gekennzeichnet.

Abstände zweier Punkte werden durch Integration über das Linienelement ds^2 ermittelt. Für kartesische Koordinaten gilt bekanntermaßen

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.2)$$

In der Speziellen Relativitätstheorie ist das raum-zeitliche Linienelement gegeben als

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.3)$$

wobei $\eta_{\mu\nu}$ die Minkowski-Metrik wie folgt definiert ist:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Dies repräsentiert einen flachen Raum. Mit dem Übergang in die Allgemeine Relativitätstheorie ist zu beachten, dass Objekte mit Masse, Energie und Impuls eine Krümmung der Raumzeit bewirken. Gravitation bezeichnet die Effekte, welche durch diese Krümmung entstehen. Krümmung bedeutet eine Veränderung der Metrik in Gleichung 2.3 von der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ zu einer allgemeineren Metrik $g_{\mu\nu}$. Es gilt also

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.5)$$

Die Effekte der Krümmung sind sehr gering, so dass nur Abweichungen in erster Ordnung von der Minkowski-Metrik betrachtet werden müssen, welche als $h_{\mu\nu}$ bezeichnet werden. Man schreibt also

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

Frei fallende Testmassen bewegen sich in der gekrümmten Raumzeit auf Geodäten². Dies sind die Bewegungen, welche im kartesischen Raum als durch Gravitation verursacht beschrieben werden. Für die sogenannte harmonische Eichung werden die Koordinatenachsen durch die Weltlinien, die Spuren der Orstvektoren, frei fallender Testmassen festgelegt. In dieser Eichung geht die Einstein'sche Feldgleichung im Vakuum in die folgende Wellengleichung über, wie in [Bla05] beschrieben.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2}\right) h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.7)$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind ebene Wellen. Diese periodischen Abweichungen des Metrikensors $g_{\mu\nu}$ vom Minkowski-Tensor $\eta_{\mu\nu}$ von der Form ebener Wellen

$$h_{\mu\nu}(r, t) = h_{\mu\nu}^0 \cdot \sin(kr - \omega t + \varphi_{\mu\nu}) \quad (2.8)$$

werden als Gravitationswellen mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = c$ und Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c}$, bezeichnet. Die Amplitude $h_{\mu\nu}^0$, kurz h , heißt **Strain** der Welle. Eine solche Gravitationswelle, welche sich entlang der z-Achse ausbreitet, hat die Gestalt

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{xy} & -h_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

und kann als solches in zwei Polarisierungen zerlegt werden.

$$h_{\mu\nu} = ah_+ + bh_\times \quad \text{mit} \quad (2.10)$$

$$h_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (2.11)$$

$$h_\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Es ist zu beachten, dass in der harmonischen Eichung eine Gravitationswelle keine Bewegung freier Massen verursacht, sondern eine Veränderung der Metrik, welche den Raum zwischen ihnen charakterisiert.

Dies lässt sich jedoch auch anschaulicher darstellen. Wird statt der harmonischen Eichung die Betrachtung im Laborsystem mit kartesischen Koordinaten gewählt, so lässt sich die Wirkung einer Gravitationswelle nach [Sau94, ab Seite 25] auch quasi-newton'sch beschreiben. Und zwar in der Art, dass eine Gravitationswelle als Kraft auf alle freien Massen wirkt. Eine Gravitationswelle in z-Richtung mit h_+ Polarisation übt auf zwei freie Objekte der Masse m auf der x-Achse mit Abstand L vom Ursprung, wie in Abbildung 2.1, die Kraft

$$F_{GW} = \frac{1}{2}mL \frac{\partial^2 h_{xx}}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

aus. In dieser Formel wird deutlich, dass eine konstante Krümmung der Raumzeit, also $h_{xx} = \text{const.}$ keine Kraft verursacht. Ändert sich h_{xx} jedoch sinusartig, was als Gravitationswelle bezeichnet wird, so wirkt eine Kraft, welche den Abstand der Objekte abwechselnd verkleinert und vergrößert. Man bezeichnet diese Kraft daher als Gezeitenkraft.

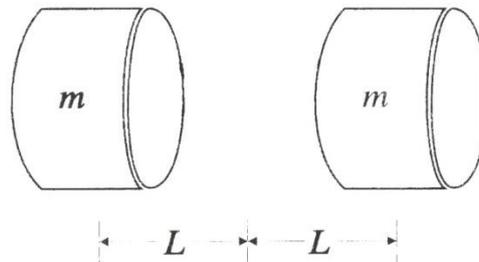


Abbildung 2.1.: Zwei Testmassen auf der x-Achse im Abstand L vom Ursprung angeordnet, abgewandelt entnommen aus [Sau94, Seite 26, Fig. 2.8]

Es kann gezeigt werden, dass eine Gravitationswelle mit Strain h zu einer maximalen relativen Änderung des Abstandes $l = 2L$ zweier freier Testmassen in der x-y-Ebene von

$$\frac{\partial l}{l} = \frac{h}{2} \quad (2.14)$$

führt. Ein größerer Strain der Gravitationswelle verursacht also eine größere relative Abstandsänderung zweier Objekte. Die resultierende Bewegung freier Massen ist in Abbildung 2.2 beispielhaft gezeigt. In der ersten Halbperiode staucht die Gravitationswelle den Kreis, der aus freien Testmassen gebildet wird, in y-Richtung und streckt ihn in x-Richtung. In der zweiten Halbperiode kehrt sich der Effekt um. Die Beschreibung von Gravitationswellen

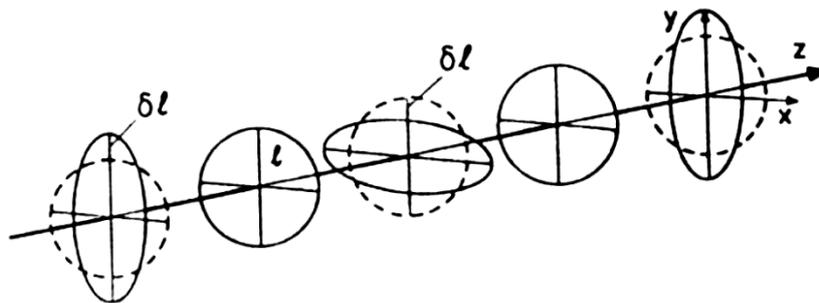


Abbildung 2.2.: Wirkung einer Gravitationswelle in z-Richtung mit h_+ Polarisation auf kreisförmig angeordnete Testmassen, entnommen aus [Dan93, Seite 104, Abb. 2]

durch Gezeitenkräfte ist anschaulich und gut zur Betrachtung bei gleichzeitig wirkenden weiteren Kräften geeignet. Sind die Abstände der betrachteten Massen kleiner als die Wellenlänge³ so ist die Beschreibung mittels Gezeitenkräften konsistent.

³ Gravitationswellen erreichen typischerweise Frequenzen bis etwa kHz und somit Wellenlängen ab 300km. (Dan 93)

2.2. Entstehung und astronomische Quellen von Gravitationswellen

Die mögliche Existenz von Gravitationswellen wurde bisher als eine formelle Folge aus der Mathematik der allgemeinen Relativitätstheorie betrachtet. Nun soll die Möglichkeit ihrer Entstehung beleuchtet werden. Analog zur elektromagnetischen Strahlung kann dies sehr gut durch eine Multipolentwicklung geschehen, solange die Abmessungen der Quelle deutlich unter der Wellenlänge der abgestrahlten Gravitationswelle liegen. Im Anhang wird in Abschnitt A gezeigt, dass die Erzeugung von Gravitationswellen durch die zweifache zeitliche Ableitung des retardierten Quadrupolmomentes der Gravitation $I_{\mu\nu}$ dominiert wird, wie in folgender Formel gezeigt.

$$h_{\mu\nu} = \frac{2G}{Rc^4} \ddot{I} \left(t - \frac{R}{c} \right) \quad (2.15)$$

Es ist zu erkennen, dass die Amplitude der Welle im Abstand R mit $\frac{1}{R}$ abnimmt. Anschaulicher ist die Betrachtung der Strahlungsleistung L_{GW} , welche in Form von Gravitationswellen abgestrahlt wird. Nach [Dan93] gilt für eine Quelle, welche sich mit Kreisfrequenz ω um eine Achse dreht und deren von der Axialsymmetrie abweichende Massenanteile das Trägheitsmoment θ haben

$$L_{GW} = \frac{G}{5c^2} \cdot 32 \cdot \theta^2 \omega^6. \quad (2.16)$$

Es strahlen also nur Objekte, die nicht axialsymmetrisch sind Gravitationswellen ab, zum Beispiel eine sich um ihren Mittelpunkt drehende Hantel, jedoch nicht eine sich um ihre Achse drehende Scheibe. Sich schneller drehende Objekte strahlen sehr viel mehr Leistung ab als langsamer drehende Objekte. Auffällig ist auch der extrem kleine Faktor $\frac{G}{5c^2} \approx 10^{-54} \frac{\text{sm}^2}{\text{kg}^3}$, welcher dafür verantwortlich ist, dass die abgestrahlte Leistung recht gering und damit Gravitationswellen schwer zu detektieren sind. Der sehr verständliche Wunsch des Experimentalphysikers wäre es eine Quelle für Gravitationswellen zu konstruieren, deren Eigenschaften er manipulieren kann. Als Beispiel⁴ dafür dient ein Eisenstab von 100m Länge und 1000t Masse, der mit 3 Hz an der Grenze seiner Festigkeit rotiert. Diese Konstruktion strahlt etwa 10^{-26}W ab und die relative Längenänderung gemessen am Beginn der Wellenzone im Abstand von 10^5 km, beträgt $\frac{\delta l}{l} = 10^{-40}$. Die Messung einer solchen Gravitationswelle muss aus heutiger Sicht als unrealistisch bezeichnet werden. Bessere Aussichten hat die Messung von Gravitationswellen, die bei extremen astronomischen Prozessen entstehen. Als optimistisches Beispiel dafür betrachtet man zwei umlaufende Neutronensterne mit Abstand 100km, Masse jeweils $1,4M_{\odot}$ und Bahnperiode 10^{-2}s , welche sich in der Nähe des Zentrums unserer Milchstraße befinden. Dieses System strahlt etwa 10^{45}W ab und die relative Längenänderung, gemessen im angenommenen Abstand von etwa $3 \cdot 10^{17}\text{km}$, beträgt $\frac{\delta l}{l} = 10^{-18}$.

Diese Zahlenbeispiele verdeutlichen, dass nur die energiereichsten astrophysikalischen Systeme als Quellen für Gravitationswellen in Frage kommen. Dabei können Kollapsprozesse wie Supernovae, sowie Verschmelzungsprozesse sich umkreisender Neutronensterne oder Schwarzer Löcher unterschieden werden. Beim Bau eines Detektors stellt sich die Frage, wie viele Ereignisse in einem festen Zeitintervall beobachtet werden können. Zwar sind Supernovae deutlich wahrscheinlicher als

Verschmelzungen, jedoch strahlen letztere stärkere Gravitationswellen ab, weshalb Ereignisse in einem größeren Volumen detektiert werden können. Dieser Effekt überwiegt, sodass Verschmelzungsprozesse die attraktivsten Quellen für die derzeit eingesetzten Gravitationswellendetektoren darstellen. Auch die Gravitationswellen, die am 14. September 2015 von den aLIGO Detektoren gemessen wurden, stammten von der Verschmelzung zweier Schwarzer Löcher. Bei einem Verschmelzungsprozess umkreisen sich zwei Neutronensterne oder Schwarze Löcher, man spricht von einem Binärsystem. Dabei strahlen sie, wie oben gezeigt, Energie in Form von Gravitationswellen ab, wodurch ihre kinetische Energie abnimmt. Damit verringert sich ihre Geschwindigkeit und ihr Abstand, während sich Winkelgeschwindigkeit und Umlauffrequenz erhöhen. Mit den letzteren steigt nach Formel 2.16 auch die Strahlungsleistung und ebenfalls die Amplitude der Gravitationswelle. Zusammen genommen bezeichnet man die Signalform der Gravitationswellen eines Binärsystems mit steigender Amplitude und Frequenz als *Chirp*. Nachdem sich die Objekte so weit genähert haben, dass sie verschmelzen, folgt ein Abklingen. In Abbildung 2.3 ist oben das vom aLIGO Detektor H1 in Hanford, Washington, aufgenommene Signal vom 14.09.2015 zu sehen.

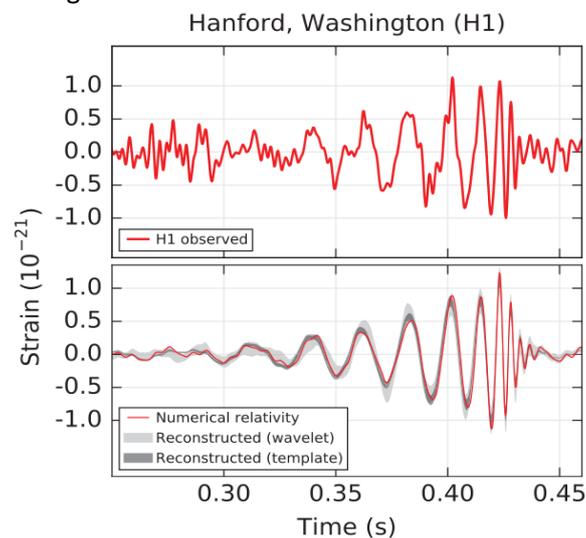


Abbildung 2.3.: Detektorsignal des aLIGO Detektors in Hanford, Washington.

Oben: Aufgenommener Strain h . Unten: Modellberechnung (rot) und rekonstruierte Wellenformen (schattiert) für das Gravitationswellenevent GW150914, entnommen als Ausschnitt aus [Abb16, Seite 061102-2, FIG. 1]

Man erkennt in der unteren Abbildung deutlich die Übereinstimmung der rekonstruierten Wellenform mit den numerischen Berechnungen für die Verschmelzung zweier schwarzer Löcher. Das Signal zeigt den erwarteten Chirp und das Abklingen ab etwa 0,425 s wie oben beschrieben.

Aufgabe 1: Beschreiben Sie, was eine Gravitationswelle ist und wie sie auf massebehaftete Objekte wirkt.

Aufgabe 2: Nennen Sie mögliche Quellen für Gravitationswellen. Welche Eigenschaften müssen diese Quellen aufweisen?

2.3. Detektion von Gravitationswellen

2.3.1. Historischer Überblick

Das Forschungsgebiet der Gravitationswellen wurde durch die Arbeit von Albert Einstein im Jahr 1916 begründet. In den folgenden Jahren war die Behandlung des neuen Wellenphänomens vor allem theoretischer Natur. Nachdem zuerst die linearisierte Theorie verstanden wurde, konnten später immer komplexere Modelle für die Entstehung von Gravitationswellen - zumeist numerisch - berechnet werden. Auf experimenteller Seite begann die Arbeit an Detektoren in den 1960er Jahren mit Joseph Weber. Die nach ihm benannten Resonanzdetektoren sind Aluminiumzylinder, welche durch eine Gravitationswelle in ihren Schwingungsmoden angeregt werden und deren Nachschwingen von Piezo- oder Beschleunigungssensoren gemessen werden kann. Weber gab im Jahr 1969 bekannt, er habe koinzidente Signale gemessen und damit Gravitationsstrahlung entdeckt [Web69].

Aus heutiger Sicht ist es die Meinung der Wissenschaftsgemeinschaft, dass Webers Detektorprinzip zwar theoretisch fundiert war, aber praktisch nicht die nötige Sensitivität erreicht haben kann. So wurde auch in den folgenden Jahren mit einer Vielzahl weiterentwickelter Resonanzdetektoren keine erfolgreiche Messung von Gravitationswellen erreicht. Dennoch ist Joseph Weber auf dem Gebiet der Gravitationswellendetektion als Pionier anzusehen. Er leistete 1971 mit der Idee der Positionsmessung durch Laserstrahlung gemeinsam mit Robert Forward auch einen Beitrag zu dem heute praktizierten und mit aLIGO erfolgreichen Konzept der laser-interferometrischen Gravitationswellendetektoren.

Einen indirekten Nachweis über die Abstrahlung von Gravitationswellen lieferten bereits Taylor, Hulse und Weisberg mit der Entdeckung und Beobachtung des Binärpulsarsystems PSR B1913+16. Dessen kürzer werdende Umlaufdauer kann nur durch einen Energieverlust durch Gravitationswellenabstrahlung erklärt werden. Die ersten Konzepte laser-interferometrischer Gravitationswellendetektoren wurden ebenfalls schon in den 1960er Jahren entwickelt. Sie wurden bis um 1990 ausgearbeitet und Anfang der 2000er Jahre in Form von LIGO (USA), Virgo (Italien), GEO600 (Deutschland) und TAMA300 (Japan) realisiert. Mit aLIGO operieren heute die ersten Observatorien der 2. Generation laser-interferometrischer Detektoren. Weitere sind im Bau beziehungsweise in Planung. Die nächsten Schritte der Weiterentwicklung sollen weltraumbasierte Detektoren sein, welche ebenfalls auf Interferometrie beruhen. Die LISA Pathfinder Mission soll dafür erste Tests im All durchführen und konnte im Juni 2016 erste positive Ergebnisse veröffentlichen [Arm16].

In den folgenden Abschnitten soll das grundlegende Konzept laser-interferometrischer Detektoren genauer erläutert werden.

2.3.2. Michelson-Interferometer (MI)

Das Michelson-Interferometer wurde im Jahr 1881 von Albert A. Michelson entwickelt als Versuch, den damals noch vermuteten Effekt des Ätherdrifts nachzuweisen. Der Aufbau des Interferometers ist in Abbildung 2.4 gezeigt. Er besteht aus einer Lichtquelle von der Licht im Winkel von 45° auf einen Strahlteiler (im folgenden: *Main Beamsplitter*, *MBS*) fällt und von dort mit gleichen Amplituden zu zwei Spiegeln reflektiert (im folgenden: *y-Arm*, *Spiegel 2*) bzw. transmittiert (im folgenden: *x-Arm*, *Spiegel 1*) wird. Von den Spiegeln wird das Licht zurück auf den Strahlteiler geworfen und dort wieder transmittiert bzw. reflektiert. Es interferiert und fällt auf einen Schirm oder eine Photodiode (im folgenden: *Interferometer-Ausgang* oder *output port*).

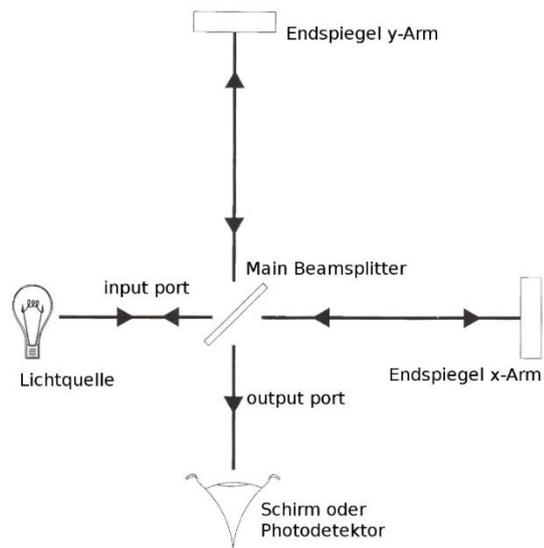


Abbildung 2.4., links: Schematischer Aufbau eines Michelson-Interferometers, abgewandelt entnommen aus [Sau94, Seite 14, Fig. 2.3], **rechts:** LIGO Hanford (Bild: Caltech/MIT/LIGO Lab)

Bei gleichen Armlängen interferiert das Licht konstruktiv, ebenso wenn sich die Armlängen um $\lambda/2$ unterscheiden. Sonst interferiert das Licht teilweise bzw. bei Abweichungen um $\lambda/4$ total destruktiv. Dies ergibt nach [Bla03] folgende Formel für die Leistung am Interferometer-Ausgang:

$$P_{out} = P_{in} \cos^2[k(l_x - l_y)] \quad (2.17)$$

Dabei ist P_{in} die Leistung und k die Wellenzahl des eingestrahlichten Lichts. l_x bzw. l_y sind die Armlängen. Wie in der folgenden Abbildung 2.5 zu sehen, verläuft die Intensität am Interferometer-Ausgang \cos^2 -förmig mit der Armlängendifferenz.

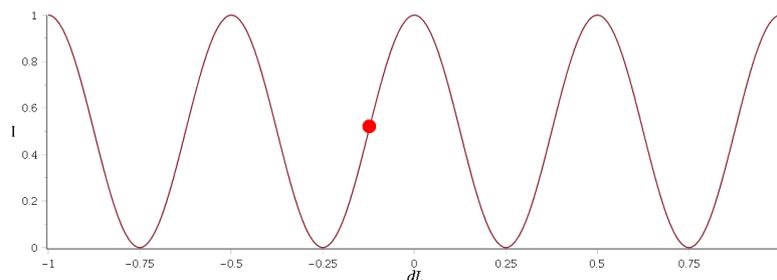


Abbildung 2.5.: Intensität am Interferometer-Ausgang eines Michelson-Interferometers in Abhängigkeit von der Armlängendifferenz in Einheiten der Wellenlänge. Der rote Punkt entspricht einem möglichen Arbeitspunkt.

Eine solche Darstellung des Verlaufs der Intensität am Interferometer-Ausgang bei der Änderung einer Armlänge um mehrere Wellenlängen wird als *Signalform* des jeweiligen Aufbaus bezeichnet. Die Signalform ist von besonderem Interesse für die Funktion aller hier beschriebener Interferometer, denn durch die Justage wird der Aufbau auf eine Stelle in diesem Signalverlauf eingestellt. Die optimale Wahl wird als Einstellung auf den **Arbeitspunkt**, welcher in der Abbildung durch einen roten Punkt verdeutlicht ist, bezeichnet. Die **Steigung in diesem Punkt entspricht in erster Näherung dem Faktor mit dem das Photosignal auf kleine Änderungen der Armlängendifferenz, zum Beispiel durch eine Gravitationswelle, reagiert**. Aufgrund dieses Verhaltens ist ein Michelson-Interferometer gut zur

Messung von kleinen Längenänderungen geeignet. Im Fall eines laser-interferometrischen Gravitationswellendetektors zeigt die senkrechte Anordnung der Arme ihren besonderen Vorteil bezüglich der Quadrupoleigenschaft der Gravitationswellen. Eine hindurchlaufende Gravitationswelle verkleinert, bei entsprechender Polarisierung, in ihrer ersten Periodenhälfte wie oben beschrieben den Abstand zwischen Strahlteiler und einem Spiegel, während sie gleichzeitig den Abstand zum anderen Spiegel erhöht. In der zweiten Periodenhälfte ist der Effekt umgekehrt. Im Maximum führt dies also zu einer zusammengenommenen Armlängendifferenz von

$$dL = h \cdot L \quad (2.18)$$

wobei L die mittlere Armlänge des Interferometers ist. Dies ist der grundlegende Effekt in jedem modernen Gravitationswellendetektor, jedoch reicht die Sensitivität alleine nicht zur Messung der extrem kleinen Auslenkungen, die Gravitationswellen bewirken. Zum Vergleich: Das von Michelson und Morley im Jahr 1887 verwendete Interferometer konnte Weglängenunterschiede von $h = dL/L = 25\text{nm}/22\text{m} = 1,136 \cdot 10^{-9}$ detektieren (für Gravitationswellen wird mindestens $dL/L \approx 10^{-21}$ benötigt!).

Zusammenfassend: MI

VORTEILE des Michelson-Interferometers als Gravitationswellendetektor

- Misst generell kleine Längenänderungen in den Armlängen
- Nutzt durch 90°-Anordnung der Arme den Quadrupolcharakter der Gravitationswellen aus

NACHTEILE des Michelson-Interferometers als Gravitationswellendetektor:

- Trotzdem nicht sensitiv genug (Steigung am Arbeitspunkt noch zu gering)

2.3.3. Fabry-Perot-Interferometer (FPI)

Während sich bei einem Michelson-Interferometer zwei Lichtstrahlen überlagern, gibt es auch Interferenz zwischen mehreren Strahlen. In einem Fabry-Perot-Interferometer wird Interferenz unendlich vieler Strahlen erreicht. Dies geschieht im simpelsten Aufbau dadurch, dass zwei reflektierende, ebene Flächen mit großen Reflexionskoeffizienten r_1 und r_2 parallel in einem geringen Abstand L positioniert werden. Der Aufbau wird als *Interferometer*, *Resonator* oder *Kavität* üblicher Weise mit den Namen seiner Erfinder oder mit dem Zusatz *optisch* bezeichnet. Fällt nun Licht normal zu diesen Flächen ein, in Abbildung 2.6 gezeigt von links, so wird es an den Flächen jeweils mit dem Koeffizienten r_1 bzw. r_2 reflektiert. Außerdem wird es jeweils mit dem Koeffizienten t_1 bzw. t_2 transmittiert, sodass sich zu beiden Seiten des Interferometers Strahlen überlagern, welche verschieden oft innerhalb der Kavität hin und her reflektiert wurden. In der Abbildung wurden die Strahlen zur besseren Übersicht in unterschiedlicher Höhe gezeichnet, tatsächlich sind diese Strahlen alle in einer Achse überlagert zu denken, sie wurden außerdem mit ihren Amplituden nach der entsprechenden Anzahl an Umläufen beschriftet. Die Seite des einfallenden Lichtes, in der Abbildung links, wird im Folgenden als *input port*, die Seite des hindurchtretenden Lichtes, in der Abbildung rechts, wird als *Interferometer-Ausgang* (oder *output port*) bezeichnet. Summiert man die Strahlen am

Eingang bzw. Ausgang, so kann für die gesamte Kavität ein Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizient von

$$r_c = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2}{1 - r_1 r_2 e^{-ikL}} \quad (2.19)$$

$$t_c = \frac{t_1 t_2 e^{-ikL}}{1 - r_1 r_2 e^{-ikL}} \quad (2.20)$$

angegeben werden.

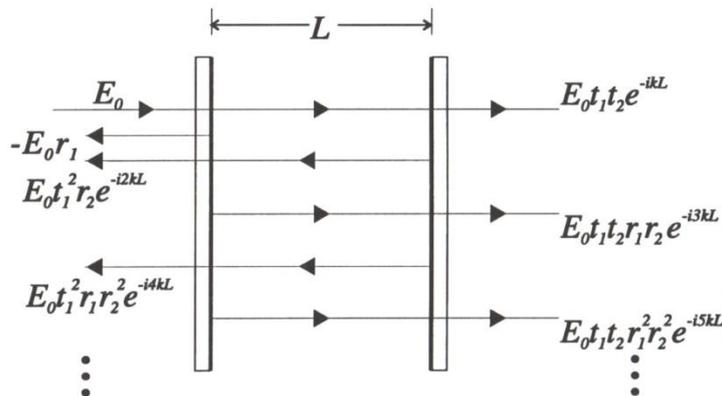


Abbildung 2.6.: Schematischer Aufbau eines Fabry-Perot-Interferometers, entnommen aus [Sau94, Seite 92, Fig. 6.3]

Mit Gleichung 2.20, welche als *Airy-Formel* bezeichnet wird, kann für Abbildung 2.7 die Intensität am Interferometer-Ausgang in Abhängigkeit der Kavitätslänge L berechnet werden. Sie zeigt scharfe Peaks im so genannten Resonanzbereich, welche $\lambda/2$ voneinander entfernt sind. Diesen Abstand bezeichnet man als *freie Spektralbreite* oder *FSR* (engl. free spectral range). Aus dieser Darstellung erkennt man den besonderen Nutzen eines Fabry-Perot-Interferometers: Wie man im Vergleich mit der zum Michelson-Interferometer gehörenden Abbildung 2.5 sieht, zeigt diese Signalform eine deutlich stärkere Intensitätsänderung **bei kleinen Abweichungen im Bereich der Resonanz** (s. roter Punkt in Abb. 2.7).

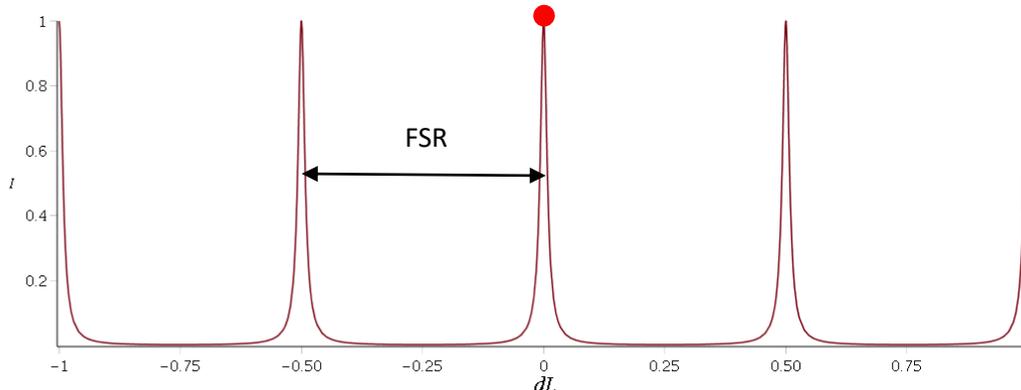


Abbildung 2.7.: Intensität am Interferometer-Ausgang für eine Kavität mit Reflexivität beider Spiegel $R = 0,9$ in Abhängigkeit von der Abweichung der Kavitätslänge von einem beliebigen Resonanzbereich in Einheiten der Wellenlänge. Der rote Punkt entspricht einem möglichen Arbeitspunkt.

Für einen Detektor bedeutet das eine höhere Sensitivität. Es ist üblich, eine Fabry-Perot-Kavität entsprechend der Schärfe ihres Resonanzbereiches durch ihre *Finesse* F zu charakterisieren. Diese bezeichnet das Verhältnis von freier Spektralbreite FSR zur Halbwertsbreite δL der Peaks.

$$F = \frac{FSR}{\delta L} \quad (2.21)$$

Die Finesse hängt nur von der Reflexivität der Spiegel ab und kann für große Reflexivitätskoeffizienten, wie in [Luh03, Seite 10] gezeigt, mit folgender Formel berechnet werden. Diese zeigt, dass höhere Reflexivitäten der Spiegel für eine höhere Finesse sorgen.

$$F = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (2.22)$$

(Anmerkung: Die Reflexivität R steht mit dem Reflexionskoeffizienten r in der Beziehung $r = \sqrt{R}$. Hat man z.B. einen Strahlteiler mit Teilungsverhältnis 90:10, so ist $R = 0,9$ und $r = \sqrt{0,9}$).

Jedoch verändert sich bei einer Armlängenänderung nicht nur die Intensität des reflektierten bzw. transmittierten Lichtes, sondern auch die Phase. Dies kann am besten wie in Abbildung 2.8 gezeigt werden, wobei die komplexe Amplitude des von der Kavität reflektierten Lichtes bei kleinen äquidistanten Abweichungen der Kavitätslänge aufgetragen ist.

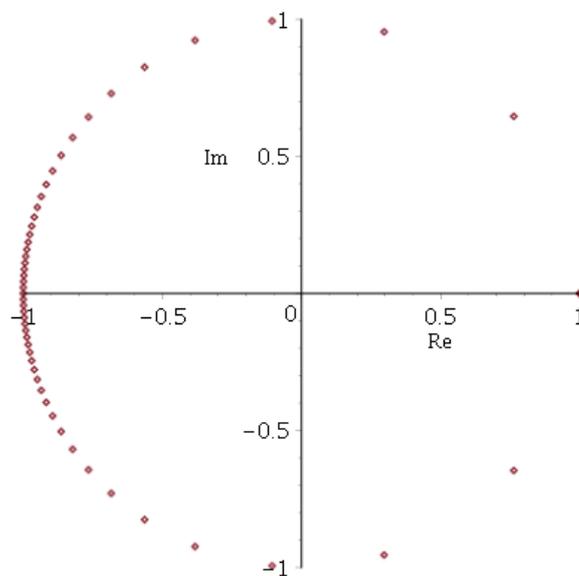


Abbildung 2.8.: Komplexe Amplitude des reflektierten Lichtes am input port für eine Kavität mit Reflexivitäten $R_i = 0,5$ und $R_o = 1$. 50 Punkte mit jeweils äquidistanter Änderung der Kavitätslänge bis zu $\lambda/2$.⁵

In diesem Diagramm ist jeder Punkt als Ende eines Vektors zu sehen, dessen Länge die Amplitude und dessen Winkel mit der x-Achse die Phase des Lichtes repräsentiert. Die Resonanzbedingung ist bei +1 erfüllt. Es ist zu erkennen, dass die Punkte bei +1 deutlich größere Abstände haben als bei -1. Dies

5 Die für diese Abbildung gewählte Konfiguration $R_i < R_o$ bezeichnet man nach der Notation von (Bla03, Seite 372) als overcoupled.

verdeutlicht, dass sich die Phase bei immer gleicher Längenänderung deutlich schneller ändert, wenn dies in Bereichen um die **Resonanzbedingung** geschieht (s. Arbeitspunkt in Abb. 2.7). Dieser Effekt wird in kombinierten Michelson-Fabry-Perot-Interferometern ausgenutzt, welche in Abschnitt 2.3.4 beschrieben werden.

Zusammenfassend: FP

VORTEILE des Fabry-Perot-Interferometers als Gravitationswellendetektor

- Misst kleine Längenänderungen in den Armen besser als das MI (Steigung um den Arbeitspunkt im Resonanzbereich sehr steil, d.h. sehr sensitiv gegenüber Armlängenänderungen)

NACHTEILE des Fabry-Perot-Interferometers als Gravitationswellendetektor:

- Problem: „links und rechts vom Arbeitspunkt“ jeweils Reduktion der Intensität, d.h., man weiß aus Signalbetrachtung nicht, ob der Interferometerarm von der Gravitationswelle verlängert oder verkürzt wurde.
- Lineare Anordnung: Nutzt den Quadrupolcharakter der Gravitationswellen nicht aus

Da sowohl das Michelson-Interferometer als auch das Fabry-Perot-Interferometer für sich jeweils geeignete Geräte sind, um sehr kleine Längenänderungen zu messen, so haben sie, wie oben beschrieben, jeweils auch eigene Schwächen. Aus diesem Grund verbinden die modernen Gravitationswellendetektoren auf einzigartige Weise BEIDE Interferometertypen, um deren beider Stärken auszunutzen:

2.3.4. Michelson-Fabry-Perot-Interferometer (MFPI)

In den aktuell betriebenen Observatorien wird eine Kombination aus Michelson- und Fabry-Perot-Interferometer verwendet, um die Vorteile beider Konstruktionen zu verbinden. Der Hauptvorteil des Michelson-Interferometers ist, dass es den Quadrupolcharakter der Gravitationswellen ausnutzt. Durch die senkrechte Anordnung der Interferometerarme wird die *entgegengesetzte Längenänderung* bestmöglich detektiert. Der Vorteil des Fabry-Perot-Interferometers ist dessen *deutlich stärkere Reaktion auf kleine Veränderungen der Armlänge* in den Resonanzbereichen. Forschungshistorisch entwickelte sich die Kombination der beiden Interferometer-Aufbauten aus der Erkenntnis, dass Gravitationswellen relative Weglängenänderungen bewirken und somit eine möglichst große Armlänge für ein Michelson-Interferometer wünschenswert ist (aLIGO: 4km). Da die tatsächliche Armlänge unter anderem durch finanzielle Faktoren begrenzt ist, entwickelte sich die Idee, den optischen Weg in den Interferometerarmen zu falten. Hierbei werden wie in Abbildung 2.9 gezeigt, beide Arme des Michelson-Interferometers durch Fabry-Perot-Kavitäten ergänzt. Dies ist mit nur zwei Spiegeln möglich. Es kann anschaulich als F -fache Faltung des optischen Weges betrachtet werden, wobei die physikalisch korrekte Betrachtung, wie in [Bla03] gezeigt, komplizierter ist. Für ein solches *Michelson-Fabry-Perot-Interferometer* werden die Bezeichnungen der Bauteile und Arme vom Michelson-Interferometer übernommen. Dabei wird, konsistent mit dem Fabry-Perot-Interferometer, der näher zum Michelson-Strahlteiler positionierte Spiegel als *input Spiegel* und der am Ende des

Armes liegenden Spiegel als *output Spiegel* bezeichnet. In der Abbildung sind diese beide als „Test Mass“ bezeichnet (sie werden in der Gravitationswellendetektion so bezeichnet, weil die Spiegel letztlich Massen sind, deren relative Positionen in der Raumzeit sich durch die Gravitationswellen verändern). In der Konfiguration moderner Detektoren sorgt die Verwendung von Fabry-Perot-Kavitäten für ein um den Faktor F_{ac} größeres Signal beim Durchlauf einer Gravitationswelle, wobei gilt

$$F \approx \frac{2\pi}{t_i^2} \quad (2.23)$$

Die Verstärkung ist also umso höher, je höher der Reflexionskoeffizient des input Spiegels ist. Bei der Veröffentlichung der ersten Gravitationswellendetektion durch aLIGO [Abb16, Seite 061102-3] wurde angegeben, dass durch Fabry-Perot-Kavitäten ein um den Faktor 300 größeres Signal gemessen werden konnte. Man kann somit diese Konstruktion als besonders wichtiges Element moderner Detektoren bezeichnen.

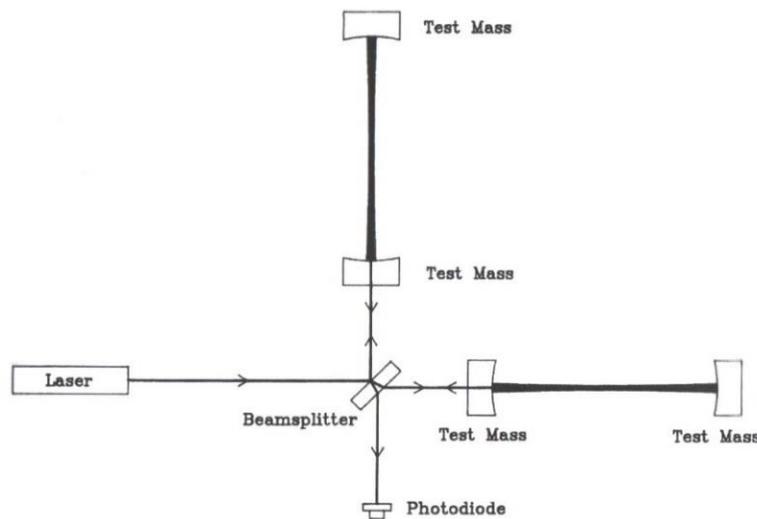


Abbildung 2.9.: Schematischer Aufbau eines Michelson-Fabry-Perot-Interferometers, entnommen aus [Bla05, Seite 307, Fig. 12.1]

Betrachtung der Signalform des Michelson-Fabry-Perot Interferometers

Die erwartete Signalform des Michelson-Fabry-Perot-Interferometer-Aufbaus mit fester x-Armlänge zeigt eine Besonderheit und muss daher an dieser Stelle zunächst eingehend diskutiert werden. Sie ist nicht nur abhängig von der Reflexivität des als input Spiegel gewählten Strahlteilers, sondern auch von der Armlänge des x-Armes. Dazu muss beachtet werden, dass die Interferenz des Michelson-Fabry-Perot-Interferometers durch die in 2.3.3 besprochene und in Abbildung 2.8 verdeutlichte Phasenbeziehung der Fabry-Perot-Kavität entsteht.

Das Licht an einem festen Punkt im Interferometer-Ausgang ist eine Überlagerung zweier Anteile, welche im Folgenden unter Vernachlässigung von optischen Verlusten betrachtet werden. Sie sind in Abbildung 2.10 hervorgehoben. Ein Anteil, blau gekennzeichnet, kommt aus dem x-Arm, hat eine konstante, durch die Armlänge festgelegte Phase und eine Amplitude entsprechend der halben Intensität des eingestrahlichten Lichtes. Seine komplexe Amplitude ist ein Vektor mit fester Länge und durch die Armlänge festgelegter Richtung. Der zweite Anteil, grün gekennzeichnet, kommt aus dem y-

Arm. Er hat dieselbe feste Amplitude, aber seine Phase verändert sich mit der Armlängenänderung des y-Armes entsprechend der oben genannten Abbildung. Seine komplexe Amplitude entspricht daher den in Abbildung 2.8 gezeigten Vektoren.

Die Beziehung zwischen y-Armlänge und Phase des Anteils aus dem y-Arm ist für einen Aufbau immer gleich, in Abbildung 2.11 wird sie durch die grünen Punkte verdeutlicht. Die resultierende Signalform unterscheidet sich jedoch je nach der x-Armlänge des Aufbaus und der daraus folgenden Phase des Anteils aus dem x-Arm.

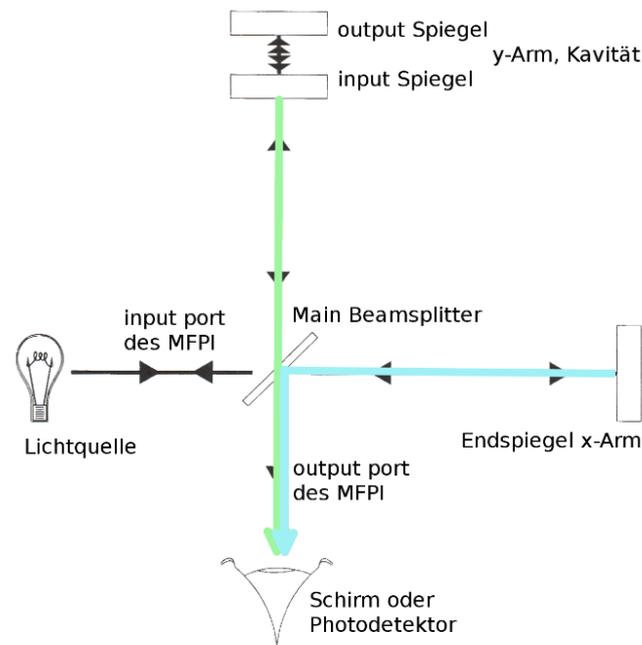


Abbildung 2.10.: Schematischer Aufbau eines Michelson-Fabry-Perot-Interferometers mit Hervorhebung der Beiträge zum Interferenzmuster, abgewandelt entnommen aus [Sau94, Seite 14, Fig. 2.3]

In Abbildung 2.11 entspricht diese Phase dem Winkel des blauen Vektors mit der reellen Achse. Wie in der Abbildung gezeigt, ergibt sich die Signalform des Michelson-Fabry-Perot-Interferometers aus der Vektoraddition der beiden komplexen Amplituden. Die x-Armlänge kann stetig geändert werden, die dadurch möglichen komplexen Amplituden des Anteils aus dem x-Arm sind in Abbildung 2.12 gezeigt, wobei vier von ihnen besonders hervorgehoben und beschriftet wurden, da sie im Folgenden zur Einordnung dienen.

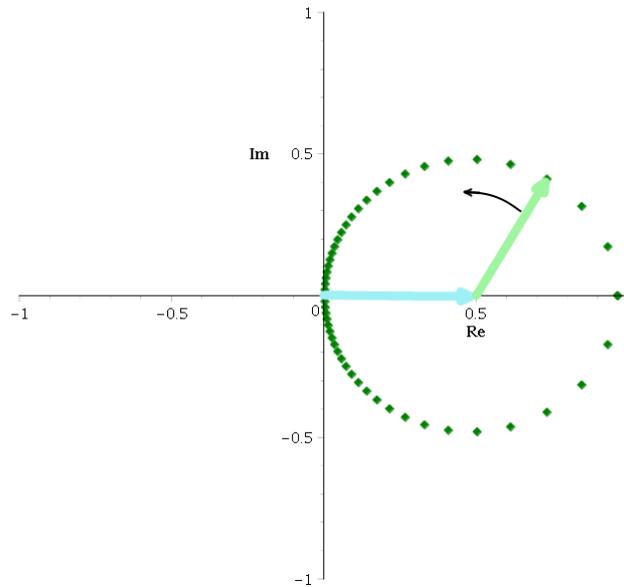


Abbildung 2.11.: Komplexe Amplitude des Lichtes am Ausgang für ein Michelson-Fabry-Perot-Interferometer bei Änderung der Kavitätslänge des y-Armes. Der blaue Vektor zeigt einen beispielhaften Beitrag aus dem x-Arm, der grüne Vektor zeigt den Beitrag aus dem y-Arm, welcher sich mit der Kavitätslänge ändert. Dies wurde durch 50 grüne Punkte analog Abb. 2.8 mit jeweils äquidistanter Änderung der Kavitätslänge bis zu $\frac{\lambda}{2}$ verdeutlicht.

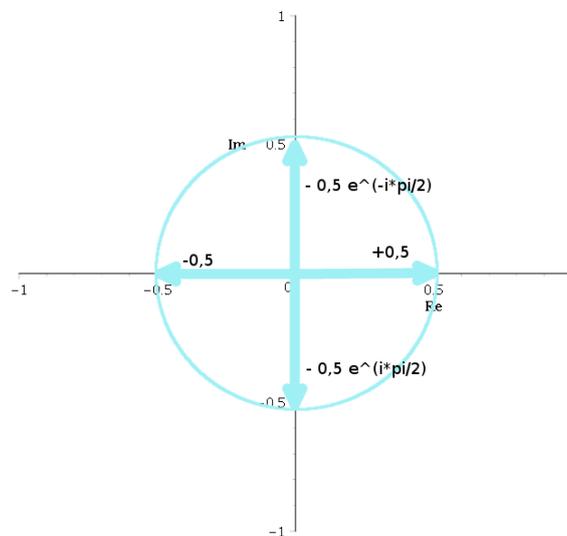


Abbildung 2.12.: Mögliche komplexe Amplituden für den Beitrag aus dem x-Arm zum Licht am Ausgang eines Michelson-Fabry-Perot-Interferometers. Die drei hier weiter diskutierten Fälle sind beschriftet, alle weiteren möglichen Fälle sind durch den Kreis, auf dem die entsprechenden komplexen Amplituden liegen, repräsentiert.

In der folgenden Abbildung 2.13 sind drei mögliche Signalformen gezeigt. Aus dem zuvor besprochenen Grund gibt es unendlich viele mögliche Signalformen. Diese können grob in drei Fälle geordnet werden, je nachdem welcher Phasensituation des x-Armes sie am nächsten kommen. Die Signalformen der beiden in Abbildung 2.12 vertikal stehenden Vektoren sind zueinander achsensymmetrisch, daher steht der in der Mitte gezeigte Fall repräsentativ nicht nur für den Beitrag $\frac{-1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$ des x-Arms zur komplexen Amplitude, sondern auch für den Beitrag $\frac{-1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

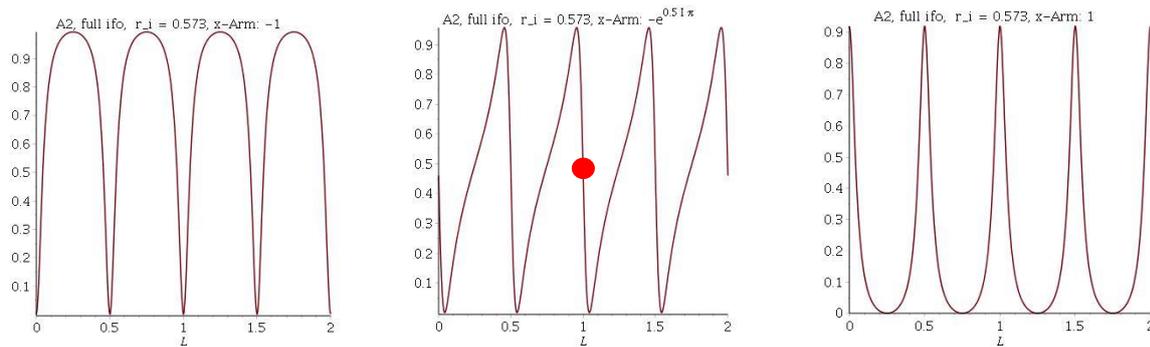


Abbildung 2.13.: Normierte Intensität am Ausgang für ein Michelson-Fabry-Perot-Interferometer. Aufgetragen über die Abweichung der Kavitätslänge von einem beliebigen Resonanzbereich in Einheiten der Wellenlänge. Die zusätzliche Bildunterschrift beschreibt den konstanten Beitrag durch Licht aus dem x-Arm. Der angenommene Reflexivitätskoeffizient des input Spiegels ist $r = 0,57$.

Komplexe Amplitude des x-Arm Anteils links: $\frac{-1}{2}$; Mitte: $\frac{-1}{2} e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$; rechts: $\frac{+1}{2}$

Neben der Steigerung der Empfindlichkeit aufgrund der weiter oben beschriebenen Faltung der Arme, kann man also auch durch eine geschickte Einstellung des Arbeitspunktes eine weitere Steigerung der Empfindlichkeit erreichen. Z.B., indem man den Arbeitspunkt wählt, wie in Abb. 2.13 am roten Punkt dargestellt. Man stellt also die Phasenbeziehung über die Armlänge des x-Arms im MFPI so ein, dass man eine Signalform wie in Abb. 2.13, Mitte, erhält (Arbeitspunkt wird dann über die Kavitätslänge auf Resonanz eingestellt – Position des roten Punktes). Man erkennt, dass kleine Abweichungen der Armlängen aufgrund der steilen Steigung an diesem Punkt eine große Helligkeitsänderung = Signalveränderung bewirkt. Außerdem wird das Signal in eine Richtung „heller“, in die andere „dunkler“, weshalb man auch entscheiden kann, ob der Interferometerarm länger oder kürzer geworden ist. Im Praktikum können wir die Situationen wie in Abb. 2.13 nachstellen. Beim echten LIGO-Detektor ist dies nochmal viel komplizierter, da noch weitere Techniken zur Steigerung der Empfindlichkeit eingesetzt werden. Die beschriebene Technik, durch geschickte Einstellung der Phasenbeziehung der Armlängen eine entsprechende Signalform bzw. Signalempfindlichkeit zu erreichen, wird aber prinzipiell so angewendet.

Zusammenfassend: MFPI

VORTEILE des Michelson-Fabry-Perot-Interferometers als Gravitationswellendetektor

- „Faltung“ der Arme in den FPI wirkt wie eine Verlängerung der MI-Arme und steigert die Signalempfindlichkeit
- MI-Anteil nutzt den Quadrupolcharakter der Gravitationswellen
- Gute Einstellung der Phasenbeziehungen zwischen MI und FPI („Arbeitspunkt“) bewirkt sehr hohe Sensitivität gegenüber Armlängenänderungen (starke Steigung in der Signalform).
- Aufgrund der Signalform ist eine Aussage möglich, ob eine Verlängerung oder Verkürzung der Arme stattgefunden hat.

Aufgabe 3: Nennen Sie zwei Detektorkonzepte für Gravitationswellendetektoren.

Aufgabe 4: Warum ist ein Michelson-Interferometer gut für die Detektion von Gravitationswellen geeignet?

Aufgabe 5: Beschreiben Sie, wie durch die Betrachtung der Signalform eines Interferometers der Arbeitspunkt, an dem das Interferometer die stärkste Reaktion auf eine Bewegung seiner Endspiegel zeigt, festgelegt werden kann.

Aufgabe 6: Berechnen Sie die Finesse eines Fabry-Perot-Interferometers mit $R_i = 0,5$ und $R_o = 1$.

Aufgabe 7: Welchen Vorteil bringt der Einbau von Fabry-Perot-Kavitäten in ein Michelson-Interferometer? Weshalb ist die Phase des von der Kavität reflektierten Lichtes von besonderem Interesse?

Aufgabe 8: Wo liegt der Arbeitspunkt bei einem Michelson-Fabry-Perot-Interferometer? Begründen Sie Ihre Aussage.

2.4. Störquellen und Rauschen

Bei der Justage und Messung wird man stets ein Rauschen beobachten können. Am sinnvollsten ist dessen Betrachtung in der FFT Darstellung. Es wird das in Literatur [2] beschriebene $\frac{1}{f}$ Rauschen auftreten, welches in der Elektronik der Detektorkomponenten begründet ist. Hinzu kommen bei unserem Aufbau vor allem Effekte durch Erschütterungen im Gebäude. Dazu zählt das Gehen durch den Laborraum und das Sprechen in Zimmerlautstärke, aber auch das Vorbeifahren eines Autos vor dem Fenster des Laborraumes oder handwerkliche Arbeiten im Laborgebäude. Dies entspricht der Problematik, die auch bei der Gravitationswellendetektion herrscht. Detektoren wie aLIGO werden in möglichst abgeschiedenen Gebieten aufgebaut und verfügen über komplexe, aktive Dämpfungssysteme für alle Testmassen. Der KAGRA Detektor in Japan wird beispielsweise in der ungenutzten Kamioka Mine aufgebaut [Aso13, Seite 1]. Neben diesen Rauschquellen muss bei Gravitationswellendetektoren das thermische Rauschen, welches durch die thermische Bewegung der Testmassen entsteht, und das Poisson'sche Schrotrauschen, welches aus der Quantennatur des Lichts folgt, beachtet und minimiert werden. Die beiden letztgenannten Effekte sind an dem Analogie-Aufbau im Praktikum jedoch nicht zu beobachten.

2.5. Diskussion des Analogieexperimentes mit Schallwellen

Für das Analogieexperiment sollen Gravitationswellen durch Schallwellen repräsentiert werden.

Sowohl bei der Gravitationswellenmessung als auch bei der Messung mit Schallwellen ist das Detektionsprinzip denkbar einfach: Die einfallende Signalwelle bewirkt eine Längenänderung in den Interferometerarmen, die **direkt** als Änderung der Helligkeit im Photodetektor registriert wird. Trifft also z.B. eine sinusartige Welle von 500Hz auf das Interferometer, so registriert der Detektor Helligkeitsänderungen mit genau dieser Frequenz. Der Unterschied ist, dass die Armlängenänderung

bei den Gravitationswellen eine Folge der Raumzeitdehnung/-stauchung ist und bei den Schallwellen eine Folge einer mechanischen Anregung z.B. der Spiegel des Geräts.

Hier noch einige wichtige Unterschiede: Im Besonderen sind Schallwellen Longitudinalwellen, und nicht transversal, noch sind sie Quadrupolwellen und zeigen daher nicht die bei Gravitationswellen in Abschnitt 2.1 diskutierten gegensätzlichen Effekte in senkrecht zueinander stehenden Armen. Dies führt zu einigen Überlegungen für einen analogen Detektoraufbau. Für einen Gravitationswellendetektor müssen Testmassen (also die Spiegel) durch Pendelkonstruktionen quasi-frei aufgehängt werden. Bei der Verwendung von Schallwellen genügt es, die Spiegel so zu gestalten und mit üblichen optischen Halterungen zu befestigen, dass sie durch Schall in Schwingung versetzt werden können. Außerdem entfällt der Hauptvorteil des Michelson-Interferometers, da Schallwellen keine gegenläufige Längenänderung der Arme bewirken. Weiterhin verursachen Schallwellen keine relative Abstandsänderung zweier Objekte (wie bei Gravitationswellen durch die Änderungen in der Raumzeit), sondern eine absolute Positionsänderung der angeregten Bauteile (mechanische Anregung). Große Armlängen sind somit, anders als bei Gravitationswellendetektoren, kein Vorteil. Man muss bei der Analogie daher auch bedenken, dass bei LIGO versucht wird, jegliche mechanische Anregung durch eine ausgeklügelte Dämpfung aller Bauteile zu vermeiden – bei der Schallwellen-Analogie ist aber gerade eine mechanische Anregung wünschenswert.

Weiterhin korrekt ist jedoch, dass ein Fabry-Perot-Interferometer im Bereich der Resonanz bei kleinen Armlängenänderungen sensitiver reagiert, somit ist es auch bei Schallwellen sinnvoll, mit einem Michelson-Fabry-Perot-Interferometer zu messen.

Ein besonderer Vorteil in der Verwendung von Schallwellen ist deren Wahrnehmbarkeit. Werden als Anregungssignale im Analogieversuch ähnliche Frequenzen verwendet, wie sie für Gravitationswellen typisch sind (von einigen Hz bis einigen kHz), so sind diese grundsätzlich für Menschen hörbar. Es kann dann unter Umständen auch gezeigt werden, dass Schallwellen auch dann noch vom Interferometer detektiert werden können, wenn sie für das menschliche Ohr sehr leise oder nicht mehr zu hören sind.

Aufgabe 9: Nennen Sie Unterschiede der Welleneigenschaften von Gravitationswellen und Schallwellen und die daraus folgenden Unterschiede im Aufbau eines Detektors.

2.6 Datenanalyse in der Gravitationswellendetektion – die Korrelationsmethode („matched filtering“)

Im letzten Teil des Versuchs beschäftigen Sie sich mit der Analyse aufgenommener Messdaten. Im LIGO-Experiment besteht ein *observational run*, d.h. eine Phase in der der Detektor läuft und Daten aufzeichnet, in der Regel aus mehr als hundert Tagen. Wenn diese Daten durch *Draufschaun* ausgewertet würden, hätte das einige offensichtliche Nachteile: Einerseits wäre eine ganze Armada von Wissenschaftlern durchgehend nur damit beschäftigt, die Messdaten durchzusehen. Andererseits kann es für das menschliche Auge zum Teil sehr schwierig sein, eine schwache Gravitationswelle in einem verrauschten Detektorsignal zu erkennen. Es wäre auch nicht einfach, auf diese Weise objektive Kriterien aufzustellen, ab welcher Signalstärke eine Detektion als zuverlässig eingestuft werden kann. Es ist also leicht einzusehen, dass eine Methode benötigt wird, mit deren Hilfe ein Computer automatisch die Messdaten einordnen und auf mögliche Gravitationswellensignale untersuchen kann. Wenn im Voraus klar ist, wie die Gravitationswellen aussehen könnten, nach denen im Detektorsignal gesucht werden soll, dann erfüllt das *Matched Filtering* diese Anforderungen sehr gut.

Die Entwicklung dieser Methode geht auf die Zeit des zweiten Weltkriegs zurück, in der bei der Entwicklung der ersten Radargeräte eine ähnliche Problemstellung ausführlich behandelt wurde: Das Radargerät gibt einen genau bekannten Radarwellenpuls an die Umgebung ab. Gleichzeitig zeichnet es die aus der Umgebung empfangenen Radarwellen auf. Immer dann, wenn das aufgezeichnete Signal dem ausgesendeten sehr ähnlich ist, handelt es sich um die Reflexion an einem (feindlichen) Objekt. Um diese Ähnlichkeit festzustellen, bedient man sich der Kreuzkorrelation.

$$R_{xy}[n] = (x \star y)[n] = \sum_m x^*[m] y[m + n]$$

Abbildung 2.14: Formel zur Berechnung der Kreuzkorrelation R eines gemessenen Signals y mit einem darin vermuteten template x . (Bei komplexwertigen Funktionen würde x konjugiert.)

Die Kreuzkorrelation wird in Formeln oft durch einen Stern symbolisiert. Je größer die Kreuzkorrelation $R[n]$ ist, desto ähnlicher ist das Signal y ab dem n -ten Eintrag dem Template x . In der digitalen Signalverarbeitung wird die hier (s. Abb. 14) dargestellte diskrete Form verwendet, für kontinuierliche Signale oder Funktionen wird in der Regel ein Integral geschrieben.

Auf abstrakter Ebene ist das Auffinden eines Gravitationswellenereignisses im verrauschten Detektorsignal dem Erkennen der (ebenfalls verrauschten oder verzerrten) Radardetektion sehr ähnlich. Aus diesem Grund kommt hier dieselbe mathematische Methode zum Einsatz. Ein relevanter Unterschied besteht allerdings darin, dass bei der Gravitationswellendetektion das gesuchte Signal nicht vom Experimentator selbst erzeugt wird und *a priori* nicht exakt bekannt ist. (Leider ist es nicht möglich, im Labor detektierbare Gravitationswellensignale mit bekannten Eigenschaften zu erzeugen.) Um die Kreuzkorrelation anwenden zu können, muss die gesuchte Signalform aber unbedingt bekannt sein. Es war Jahrzehntlang ein riesiges Problem, die Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie exakt genug zu lösen, um vernünftige Vorhersagen für die Form der Gravitationswellen zu machen, die bei gewaltigen Himmelsereignissen entstehen. Denn nur die gewaltigsten Ereignisse, wie die Kollision der dichtesten und massereichsten Objekte (schwarze Löcher oder Neutronensterne) oder der Kollaps eines Sterns in einer Supernova versprechen Gravitationswellen auszusenden, die stark genug sind, um mit der aktuellen Detektortechnologie aufgespürt zu werden.

Inzwischen sind diese Probleme mithilfe rechenstarker Computer und ausgefeilter numerischer Methoden aber ausreichend gut gelöst, um für die Detektion von Gravitationswellen die benötigten Vorhersagen über deren Gestalt zu machen. Abb. 2.15 zeigt die gemessenen Signale der allerersten direkten Detektion einer Gravitationswelle zusammen mit der im Computer modellierten Vorhersage, wie das Ereignis aus der Theorie erwartet würde.

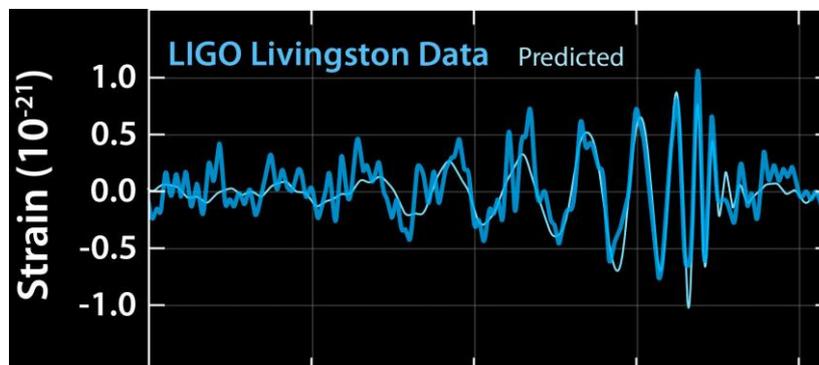


Abbildung 2.15: Daten der ersten direkten Messung einer Gravitationswelle im Vergleich mit dem aus der Theorie erwarteten Verlauf. (Quelle: <http://mediaassets.caltech.edu/gwave#graphics>)

Diese Vorhersagen für Gravitationswellen werden im Zusammenhang des Matched Filtering *Templates* genannt. Eine Sammlung solcher Templates nennt man eine *Template Bank*. Bereits während die Gravitationswellendetektoren noch laufen und weiter Daten aufzeichnen, führen im Hintergrund große Rechnerfarmen das Matched Filtering mit den Templates aus diesen Template Banks durch. Wenn der Wert der Korrelation einen bestimmten Schwellenwert überschreitet, geht man davon aus, dass eine dem Template sehr ähnliche Gravitationswelle gemessen wurde (Natürlich ist der gesamte Überprüfungsprozess noch etwas komplizierter.). Details über das zu Grunde liegende kosmische Ereignis können daraus gewonnen werden, welches Template der gemessenen Welle am ähnlichsten war - das reale Ereignis hatte dann vermutlich ähnliche Eigenschaften, wie sie zum Erstellen des Templates in der Simulation verwendet wurden. Also z.B. die Massen der beteiligten schwarzen Löcher einer Kollision können so bestimmt werden. Aus den verschiedenen Ankunftszeiten und -phasen des Signals in mehreren Detektoren kann die ungefähre Richtung bestimmt werden, aus der das Signal kam. Falls möglich wird versucht, auch optische oder andere Teleskope auf der Erde oder im Orbit auf die entsprechende Stelle am Himmel zu richten, um möglichst viele Erkenntnisse über das Ereignis zu sammeln.

Im Praktikum werden Sie auf den dort verwendeten Computern kleine Beispiel-Template-Banks finden, mit denen Sie das Matched Filtering durchführen können. Unsere Template Bank besteht zwar aus echten Templates, wie sie auch in der Gravitationswellendetektion eingesetzt werden; aufgrund begrenzter Rechenkapazitäten sind sie aber natürlich nur ein winziger Auszug.

In diesem Praktikumsversuch werden Sie am Beispiel der Gravitationswellendetektion die Methode des Matched Filtering kennen lernen und ausprobieren können. Die Methode ist jedoch nicht nur bei der Gravitationswellendetektion essentiell – immer, wenn in einem Strom von Messdaten automatisiert nach bestimmten Mustern Ausschau gehalten werden soll, kommt die Methode zum Einsatz. Zum Beispiel auch in der Radartechnologie oder den meisten Formen der digitalen Signalübertragung, über Kabel, Lichtwellenleiter, Fernbedienungen oder andere optische Freiraumübertragungen.

Anhang

Entstehung von Gravitationswellen - Multipolentwicklung

Angelehnt an das Vorgehen in [Bla05] und [Mis73] soll in diesem Abschnitt die Multipolentwicklung des Gravitationsfeldes analog zum elektromagnetischen Fall diskutiert werden. Für letzteren gilt bekanntermaßen

$$\vec{E} = \frac{1}{Rc^2} (\dot{\vec{d}}_e \times \vec{n}) \times \vec{n} \quad (\text{A.1})$$

wobei R der Abstand zur Quelle, \vec{n} der Einheitsvektor von der Quelle aus in Richtung des Beobachters und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Außerdem ist das Integral über das Volumen der Quelle

$$\vec{d}_e = \int dV \rho_q(\vec{r}) \vec{r} \quad (\text{A.2})$$

mit der Ladungsdichte ρ_q das elektrische Dipolmoment, welches als Moment kleinster Ordnung die Multipolentwicklung dominiert. Ein elektrisches Monopolmoment wäre definiert als

$$\vec{m}_e = \int dV \rho_q(\vec{r}) \quad (\text{A.3})$$

und entspräche der Gesamtladung der Quelle. Da diese jedoch, dem Grundsatz der Ladungserhaltung folgend, unverändert ist, leistet es nur einen konstanten Beitrag in der Multipolenwicklung. Bei der Betrachtung von Wellen sind die zweifachen zeitlichen Ableitungen der Beiträge zur Multipolentwicklung relevant, man sagt daher, dass das Monopolmoment *verschwindet*. Ähnliches geschieht für das Monopol- und das Dipolmoment der Gravitation.

$$\vec{m}_g = \int dV \rho(\vec{r}) \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{d}_g = \int dV \rho(\vec{r}) \vec{r} \quad (\text{A.5})$$

Hier ist nun entsprechend ρ die Massendichte. Das Monopolmoment entspricht der Gesamtmasse des Systems und verschwindet, da es dem Grundsatz der Energieerhaltung folgend, konstant ist. Die zeitliche Änderung des Dipolmoments $\dot{\vec{d}}_g$ entspricht dem Gesamtimpuls des Systems und ist daher nach Impulserhaltung ebenfalls konstant und verschwindet. Auch ein Analogon zum magnetischen Dipolmoment lässt sich für den Fall der Gravitation formulieren.

$$\mu_g = \int dV \rho(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}) \quad (\text{A.6})$$

Dabei ist $\vec{v}(\vec{r})$ die Geschwindigkeit und das Moment bleibt somit entsprechend der Drehimpulserhaltung konstant und verschwindet für diese Betrachtung. Damit sind alle bekannten Erhaltungssätze beachtet. Die nächst höhere Ordnung der Multipolentwicklung ist das

Quadrupolmoment, welches tatsächlich den dominanten Beitrag liefert. Es ist ein Tensor und wird in der Literatur üblicherweise als *reduziertes Quadrupolmoment* wie folgt formuliert.

$$I_{\mu\nu} = \int dV \left(x_\mu x_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} r^2 \right) \rho(\vec{r}) \quad (\text{A.7})$$

Dabei sind x_μ und x_ν Einträge des Ortsvektors aus Gleichung 2.1, $\delta_{\mu\nu}$ ist das Kronecker-Delta und ρ wie bisher auch die Massendichte. Integriert wird über das Volumen der Quelle. Meist kann man annehmen, dass die Erzeugung von Gravitationswellen in sonst flacher Raumzeit geschieht, da andere Massen ausreichend weit entfernt sind, so dass ihr Einfluss sehr klein ist. Außerdem ist es sinnvoll anzunehmen, dass die Geschwindigkeiten in der Quelle deutlich kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit und dass die Abmessungen der Quelle deutlich kleiner sind als die resultierende Wellenlänge. In diesem Fall gilt nun für eine Gravitationswelle:

$$h_{\mu\nu} = \frac{2G}{Rc^4} \dot{I}_{\mu\nu} \left(t - \frac{R}{c} \right) \quad (\text{A.8})$$

Dabei ist R der Abstand zur Quelle, G die Gravitationskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit und die zweifache zeitliche Ableitung des reduziertes Quadrupolmoments muss zur retardierten Zeit $\left(t - \frac{R}{c} \right)$ betrachtet werden. Mit dieser Formel wird in Abschnitt 2.2 als Formel 2.15 die Betrachtung weitergeführt.

Literaturverzeichnis

- [1] *The Fabry-Perot Interferometer*. Technischer Bericht, Universität Siegen.
<http://www.physik.uni-siegen.de/quantenoptik/lehre/fpraktikum/fabry-perot.html?lang=de>
- [2] *Ph 77 - Advanced Physics Laboratory. Lab 2 - Small-Signal Detection Using the Lock-In Amplifier*. Technischer Bericht, California Institute of Technology, Pasadena. <http://pmaweb.caltech.edu/~ph77/labs/exp2>.
- [3] *Timeline*. Technischer Bericht, LIGO Laboratory, Pasadena. <https://www.ligo.caltech.edu/page/timeline>
- [414] *CPS532-C2 SpecSheet*. Technischer Bericht, Thorlabs Inc, Newtown, New Jersey, USA, 2014. https://www.thorlabs.de/_sd.cfm?fileName=QTN004783-S01.pdf&partNumber=CPS532-C2
- [516] *EDU-MINT1/M Michelson-Interferometer Kit Handbuch*. Technischer Bericht, Thorlabs Inc, Newtown, New Jersey, USA, 2016. https://www.thorlabs.com/_sd.cfm?fileName=MTN006503-D03.pdf&partNumber=EDU-MINT1/M
- [Abb16] Abbott, B.P. et al: *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. Physical Review Letters, 116(6):061102, Februar 2016. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.
- [Arm16] Armano, M. et al: *Sub-Femto-g Free Fall for Space-Based Gravitational Wave Observatories: LISA Pathfinder Results*. Physical Review Letters, 116:231101, Juni 2016. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.231101.
- [Aso13] Aso, Y. et al: *Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector*. Physical Review D, 88(4), 2013. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.043007.
- [Bar99] Barish, B. und Weiss, R.: *LIGO and the Detection of Gravitational Waves*. Physics Today, 52(10):44, Oktober 1999. DOI: 10.1063/1.882861.
- [Bla03] Black, Eric D. und Gutenkunst, Ryan N.: *An introduction to signal extraction in interferometric gravitational wave detectors*. American Journal of Physics, 71:365, 2003. DOI: 10.1119/1.1531578.
- [Bla05] Blair, David G.: *The Detection of Gravitational Waves*. Cambridge University Press, Cambridge, digitally printed 1st pbk. version Auflage, 2005, ISBN 978-0-521-02102-9.
- [Dan93] Danzmann, K und Ruder, H.: *Gravitationswellen: Laser-Interferometer eröffnen ein neues Fenster zum All*. Physikalische Blätter, 49(2):103, Februar 1993. DOI: 10.1002/phbl.19930490207.

- [D'104] D'Inka, W. et al: *Gravitationswellen: Rippel in der Raumzeit*. Frankfurter Allgemeine Sonntagszeitung, 47:70, November 2004. <http://www.faz.net/-gwz-pkzj>
- [Far12] Farr, B. et al: *Gravitational wave science in the high school classroom*. American Journal of Physics, 80:898, 2012. DOI: 10.1119/1.4738365.
- [Ger03] Gerthsen, C. und Meschede, D.: *Gerthsen Physik*. Springer, Berlin, Heidelberg, 22. völlig neu bearb. Auflage, 2003, ISBN 978-3-540-02622-8.
- [Luh03] Luhs, W.: *Fabry Perot Resonator*. Technischer Bericht, MEOS GmbH, Eschbach, 2003. [https://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/ DerivateServlet/Derivate-12229/O.5_%20Fabry%20Perot%20Resonator](https://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-12229/O.5_%20Fabry%20Perot%20Resonator). abgerufen am 25.08.2016.
- [Lü16] Lüdemann, D.: *Gravitationswellen: Einstein hatte recht*. Zeit Online, Februar 2016. <http://www.zeit.de/wissen/2016-02/gravitationswellen-entdeckung-physik-einstein>
- [Mes08] Meschede, D.: *Optik, Licht und Laser*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 3., durchgesehene Auflage, 2008, ISBN 978-3-8351-0143-2.
- [Mic87] Michelson, A. und Morley, E.: *On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*. American Journal of Science, 34(3):333, 1887. DOI: 10.2475/ajs.s3-34.203.333.
- [Mis73] Misner, C.W. et al.: *Gravitation*. W.H. Freeman and company, San Francisco, 3. Auflage, 1973, ISBN 0-7167-0334-3.
- [Nö10] Nörtershäuser, W: *Vorlesung: Physik des Lasers*. Technischer Bericht, Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, 2010. http://www.quantum.physik.uni-mainz.de/lectures__2010__ss10_laserphysik__content.html.de
- [Sau94] Saulson, Peter R.: *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*. World Scientific, Singapur, 1994, ISBN 978-9-810-21820-1.
- [Sta14] Staley, A. et al: *Achieving resonance in the Advanced LIGO gravitational-wave interferometer*. Classical and Quantum Gravity, 31(24), 2014. DOI:10.1088/0264-9381/31/24/245010.
- [Web69] Weber, J.: *Evidence for Discovery of Gravitational Radiation*. Physical Review Letters, 22(24):1320, Juni 1969. DOI: 10.1103/PhysRevLett.22.1320.