

Fourieroptik - Versuchsvorbereitung

Karlsruher Institut für Technologie

17. Oktober 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Vorwort	3
1.2	Aufgaben zur Vorbereitung	4
2	Die Fourier-Transformation	5
2.1	Die diskrete Fourier-Reihe	5
2.2	Das Gibbs'sche Phänomen	6
2.3	Die kontinuierliche Fourier-Transformation	8
2.4	Raumfrequenzen und die 2D-Fourier-Transformation	8
3	Die Fourier-Transformation in der Bildbearbeitung	11
3.1	Fourier-Filter: Hoch- und Tiefpassfilter	11
4	Beugungsintegrale und die Fourier-Transformation	14
4.1	Kirchhoffsches Beugungsintegral	14
4.2	Fresnel-Beugung und Fraunhofer-Beugung	17
4.3	Fraunhofer-Beugung und Fourier-Transformation	18
4.4	Das Babinet'sche Theorem	18
5	Linse und Fourier-Transformation	20
5.1	Phasenänderung beim Durchtritt durch die Linse	21
5.2	Vergleich der Linse mit der Fourier-Transformation	22
6	Versuchsaufbau	23
6.1	Basis-Aufbau: Mikroskop mit Köhlerbeleuchtung	23
6.1.1	Mikroskop mit Unendlich-Strahlengang	23
6.2	Der 4f-Aufbau mit Fourier-Filterung	24
6.2.1	Fourier-Filterung im Versuch	25
6.2.2	Das Babinet'sche Theorem im Versuch	25
6.3	Die Köhlerbeleuchtung	26
6.4	Zusammengefasst: Gesamtaufbau	28

A	Das Programm Gwyddion	30
A.1	Fourier-Filterung mit Gwyddion	30
B	zur Fourier-Transformation	33
B.1	Amplitude und Phase bei der Fourier-Transformation	33
C	zur Bildbearbeitung	35
C.1	Muster-Erkennung mit der Fourier-Transformation	35
C.2	Kompression mit der Fourier-Transformation	36
	Literaturverzeichnis	38

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Vorwort

Die Fourieroptik, benannt nach *Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)*, ist ein Teilgebiet der Optik und untersucht die Ausbreitung von Licht mit den Methoden der Fourier-Analyse. Den Grundstein hierfür legte Fourier indem er bewies, dass eine abschnittsweise stetige Funktion durch eine mathematische Reihe von periodischen Funktionen, der Fourierreihe, geschrieben werden kann. Physikalisch betrachtet heißt das, dass ein kontinuierliches Signal in der Akustik oder Optik aus Schwingungen unterschiedlicher Einzelfrequenzen besteht und in diese zerlegt werden kann. Der folgende Versuch beschäftigt sich mit der Fourierfilterung, der Mikroskopie und der optischen Bildbearbeitung in denen die Grundzüge der Fourieroptik angewendet werden. Es sollen die grundlegenden Möglichkeiten der Fourieroptik aufgezeigt und vertieft werden. Die theoretischen Grundlagen, die nötig sind, um die folgenden Versuchsaufbauten zu verstehen und die Versuche durchzuführen sind in diesem Dokument ausgeführt. Hierbei handelt es sich teilweise um Grundkonzepte, die schon aus der Schule oder dem Studium bekannt sind und nur aufgefrischt werden. Hierzu zählt beispielsweise die Beugung an Einzelspalt und Gitter genauso wie die Anwendung der Fouriertransformation. Andere Konzepte sind für Sie vermutlich neu. Hierzu gehört beispielsweise die optische Hoch- und Tiefpassfilterung von Beugungsbildern. Der Aufbau zur Fourierfilterung soll zeigen, wie die Informationen der Struktur in der Objektebene im Beugungsbild in der Fourierebene kodiert sind und welche Auswirkungen Veränderungen des Beugungsbildes haben. Der Bildbearbeitungsaufbau zielt auf die Vertiefung des Wissens um die Fourierfilterung und zeigt zusätzlich die Vorgehensweise von Bildbearbeitungsprogrammen am Computer auf experimentelle Weise. Dieses Versuchspaket besteht im Wesentlichen aus zwei großen Teilen: der Fourier-Optik und der daraus resultierenden Beeinflussung des Mikroskopbildes.

In dieser Vorbereitungshilfe wird in Abschnitt 2 zunächst die Theorie zur Fourier-Transformation kurz wiederholt, bevor in Abschnitt 3 ihre Anwendung in der Bildbear-

beitung beschrieben wird. Abschnitt 4 und 5 zeigen die Verbindung zwischen der Fourier-Transformation und dem Beugungsbild bzw. der Abbildung mithilfe einer Sammellinse. In Abschnitt 6 wird beschrieben, wie diese Verbindungen im Experiment zur Durchführung von Fourier-Transformationen genutzt werden kann. Im Anhang finden sich neben weiteren Informationen zur Fourier-Transformation und ihrer Anwendung in der Bildbearbeitung eine Kurzanleitung in das Programm Gwyddion, mit dessen Hilfe Sie zuhause bereits Fourier-Transformationen von Bilddateien durchführen können.

1.2 Aufgaben zur Vorbereitung

- Lesen Sie dieses Dokument. Schauen Sie bei Bedarf in die bereitgestellte Literaturliste am Ende dieses Dokuments, in der Sie weiterführende Bücher und Links zu Videos finden.
- Folgende Begriffe und deren Funktionsweise sollten Sie erklären können: Fourier-Transformation, Mikroskop, Köhler-Beleuchtung, Fourier-Ebene, 4f-Aufbau, optischer Hochpass, optischer Tiefpass, Blenden und Linsen im Aufbau, Babinet'sches Theorem.
- Führen Sie als Vorbereitung einen optischen Hochpass und einen optischen Tiefpass an einem Bild Ihrer Wahl mit dem Programm Gwyddion durch. Gerne können Sie weitere Versuche mit diesem Programm anstellen.

Kapitel 2

Die Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation ist nach *Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)* benannt, der als erster die Einsicht hatte, periodische Funktionen könnten durch eine unendliche Summe trigonometrischer Funktionen (Sinus- und Cosinus-Funktionen) angenähert werden. Diese mathematische Methode wird heute in vielen Anwendungsfeldern eingesetzt, zum Beispiel um Signale auf ihre enthaltenen Frequenzen zu untersuchen oder Muster in Bildern zu erkennen.

Zerlegt man eine periodische Funktion $s(t)$ mithilfe der Fourier-Transformation, kann man exakt sagen welche Frequenz f mit welcher Amplitude A im Signal enthalten ist. Trägt man nun $A(f)$ auf, erhält man eine neue Darstellung desselben Signals, jetzt allerdings nicht über der Zeit, sondern über der Frequenz. Wie der Begriff „Transformation“ bereits suggeriert, verändert die Fourier-Transformation nicht den Informationsgehalt eines Signals, sondern lediglich die Form, in der es dargestellt wird. Die Fourier-Transformation wird meist dazu verwendet, die Signalstärke über der Zeit oder dem Ort in Signalstärken abhängig von den beteiligten Frequenzen umzuwandeln.¹ Da das Signal bei dieser Transformation nicht verändert wird, kann sie auch vollständig rückgängig gemacht werden, um so aus einer Menge an Frequenzanteilen beispielsweise wieder ein zeitliches Signal zu erhalten.

In den folgenden Abschnitten wird näher erklärt, wie die Fourier-Transformation funktioniert.

2.1 Die diskrete Fourier-Reihe

Mit einer diskreten Fourier-Reihe können beliebige periodische Signale aus Sinus- und Cosinus-Schwingungen zusammengesetzt werden. Andersherum können mit dieser Technik die Schwingungskomponenten periodischer Signale bestimmt werden. Zu den beliebtesten

¹In der hier verwendeten Terminologie vermittelt die Fourier-Transformation zwischen den Darstellungen im *Orts-* und im *Frequenz-Raum*. In der englischsprachigen Literatur werden dafür die Begriffe *time-domain* und *frequency-domain* benutzt. Lassen Sie sich nicht davon durcheinanderbringen, dass nach diesen

Einführungsbeispielen in die Thematik zählen das Zerlegen (Analyse) und Zusammensetzen (Synthese) der Sägezahn-, Dreiecks- oder Rechtecksschwingung (siehe Abbildung 2.1).

Sei $s(t)$ ein beliebiges Signal der Periode T , das in seine Sinus- und Cosinusschwingungen zerlegt werden soll. Wegen der geforderten Periodizität kommen nur Schwingungen in Frage, deren Periode ein Teiler von T ist. (D.h. deren Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz $f_0 = 1/T$ ist.²) Für die Synthese des Signals erhält man auf diese Weise den Ansatz in Gleichung (2.1). Die gesuchten Koeffizienten a_k und b_k erhält man gewissermaßen als Projektion des Signals auf diese Schwingungen, was in Gleichung (2.2) und (2.3) zu sehen ist. Ein Beweis dafür, dass das die gesuchte Zerlegung ergibt, wird hier nicht gegeben.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi \underbrace{k f_0}_{=: f_k} \cdot t) + b_k \sin(2\pi k f_0 \cdot t)] \quad (2.1)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \cos(2\pi f_k t) dt \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (2.2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \sin(2\pi f_k t) dt \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

Eine mögliche Rechtecksschwingung ist in Abbildung 2.1 zu sehen. Diese kann wie in Gleichung (2.4) in Sinusschwingungen zerlegt werden. A_0 ist dabei die Amplitude der Rechtecksschwingung und $\omega_0 = 2\pi f_0$ die zur Grundschwingung gehörige Kreisfrequenz.

$$s(t) = \frac{4A_0}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right] \quad (2.4)$$

2.2 Das Gibbsche Phänomen

Bricht man die Fourier-Reihe einer unstetigen Funktion nach einer endlichen Anzahl von Gliedern ab, so erhält man stets das Gibbsche Phänomen. Das bedeutet, dass die Fourier-Reihe quasi über den unstetigen Sprung hinaus „überschwingt“ (wie z.B. bei der Rechtecksschwingung in Abbildung 2.1). Interessanterweise ist die Stärke des Gibbschen Phänomens unabhängig von der verwendeten Anzahl an Gliedern in der Fourier-Reihe. Nur dessen Frequenz nimmt mit der Anzahl der Glieder zu, sodass es mit steigender Anzahl an Gliedern dadurch verschwindet, dass die Frequenz gegen unendlich divergiert. Das Gibbsche

Begrifflichkeiten auch ein Spannungssignal über der Zeit $V(t)$ im Ortsraum dargestellt ist oder eine Helligkeitsverteilung $A(x)$ in der time-domain zuhause ist. Entscheidend ist dabei stets die Unterscheidung zum Raum der Fourier-Transformierten, der jeweils mit dem Begriff der Frequenz assoziiert ist.

²Diese Schwingungen werden häufig als *Oberschwingungen* bezeichnet.

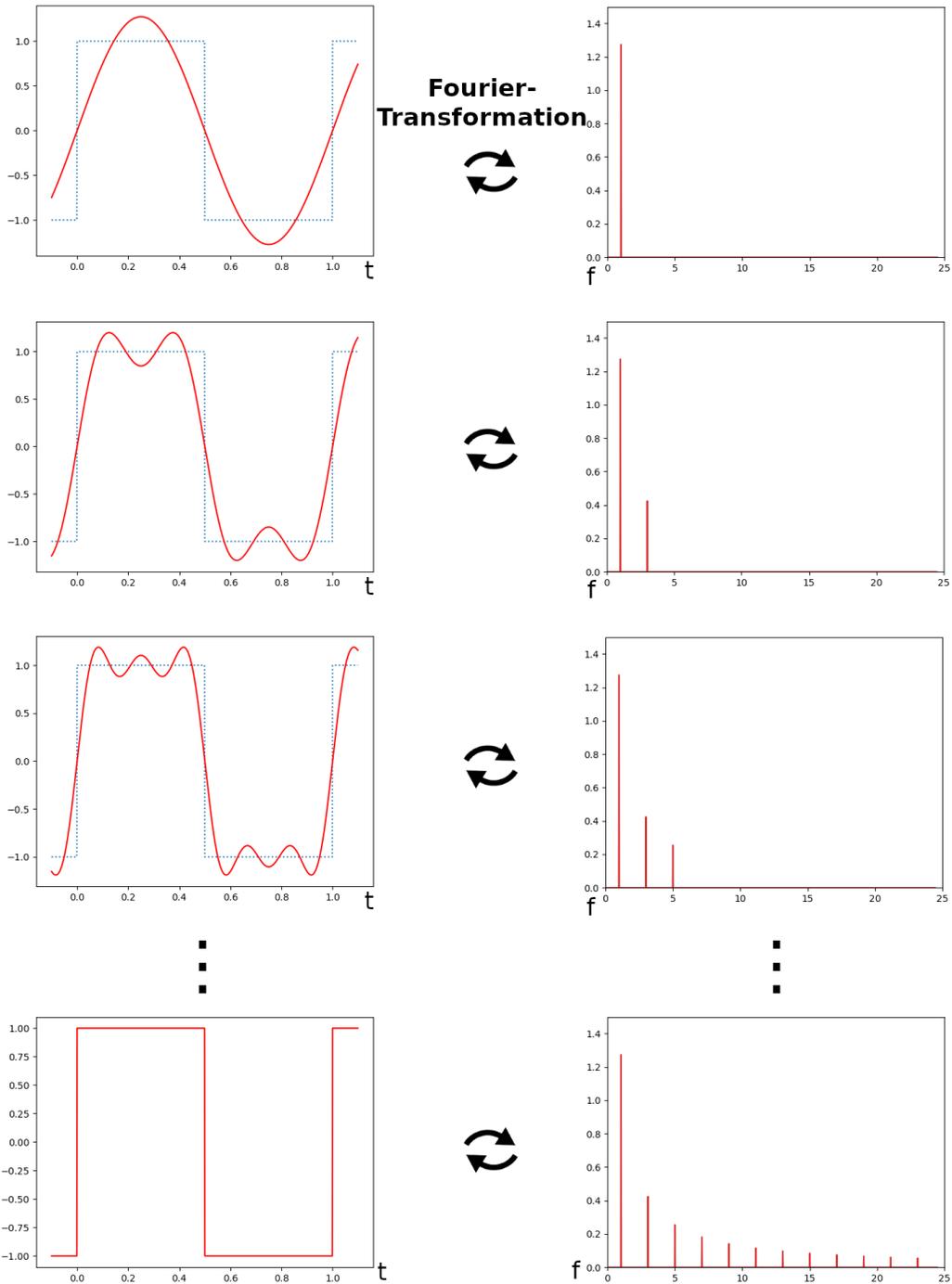


Abbildung 2.1: Veranschaulichung der Fourier-Reihe zur Approximation einer Rechtecksschwingung im Orts- (*links*) und Frequenz-Raum (*rechts*). Während von oben nach unten Terme hinzukommen, nähert sich die Fourier-Reihe der tatsächlichen Rechtecksschwingung an. Die Fourier-Reihe ist in rot dargestellt; im Ortsraum ist in blau gepunktet ebenfalls die Rechtecksschwingung zu sehen.

Phänomen taucht immer dann auf, wenn Fourier-Reihen unstetiger Funktionen nach endlich vielen Gliedern abgebrochen werden, z.B. auch in Abschnitt 3.1 und C.2.

2.3 Die kontinuierliche Fourier-Transformation

Berücksichtigt man neben der Grundschwingung der Frequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ und ihren ganzzahligen Oberschwingungen alle reellen Frequenzen, erhält man die in Gleichung (2.5) dargestellte kontinuierliche Fourier-Transformation. Sie kann nicht nur für periodische Funktionen durchgeführt werden, sondern für beliebige integrierbare Funktionen. Die Fourier-Transformation wird hier mit der komplexen e -Funktion durchgeführt, da diese Schreibweise kompakter ist als mit Sinus- und Cosinus-Funktionen.³ Das Ergebnis der Transformation ist eine Funktion $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, deren Betrag für jede Frequenz f angibt, wie stark diese Frequenz im Signal vertreten ist. (Die Phase gibt die relative Phasenlage an.) Eine erneute Anwendung der Fourier-Transformation liefert wieder das Ausgangssignal (bis auf Vorzeichen); die Fourier-Transformation ist sozusagen selbstinvers, siehe Gleichung (2.6).

$$\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}} s(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.5)$$

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f) \cdot e^{+i2\pi ft} df \quad (2.6)$$

2.4 Raumfrequenzen und die 2D-Fourier-Transformation

Häufig wird die Fourier-Transformation auf ein Ton- oder Spannungssignal $s(t)$ über der Zeit t angewandt, um Informationen darüber zu erhalten, welche Frequenzanteile im Signal enthalten sind. Prinzipiell kann man die Fourier-Transformation aber auf beliebige Funktionen anwenden, nicht nur auf solche über der Zeit; hier im Versuch wird sie auf räumliche Strukturen angewandt. Das Helligkeitsprofil eines Transmissionsgitters entlang einer Achse senkrecht zu den Gitterlinien sieht beispielsweise aus wie eine Rechtecksschwingung und hat deshalb dieselbe Fourier-Transformierte (siehe Abbildung 2.2). Dabei steht die Frequenz allerdings nicht für eine zeitliche, sondern eine räumliche Wiederholungsrate und wird deshalb Raumfrequenz genannt.⁴ Die Fourier-Transformierte einer räumlichen Verteilung gibt also deren Raumfrequenzen wieder.⁵

³Wegen $\exp(-ix) = \cos(x) - i\sin(x)$ können die Darstellungen leicht ineinander überführt werden. In der Sinus/Cosinus-Darstellung erhält man für jede Frequenz die Amplitude aus quadratischer Addition des Sinus- und des Cosinusanteils, die Phase mithilfe des Arkussinus. (Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Fourierreihe#Darstellungsformen> für Gleichungen.)

⁴Das bekannteste Beispiel für eine Raumfrequenz ist vermutlich die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$, die der räumlichen Periodizität (Wellenlänge λ) umgekehrt proportional ist. Man beachte die analoge Berechnungsweise zur Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ aus der (zeitlichen) Periodendauer T .

⁵Allgemein nennt man die Paare von Größen, die durch eine Fourier-Transformation ineinander überführt

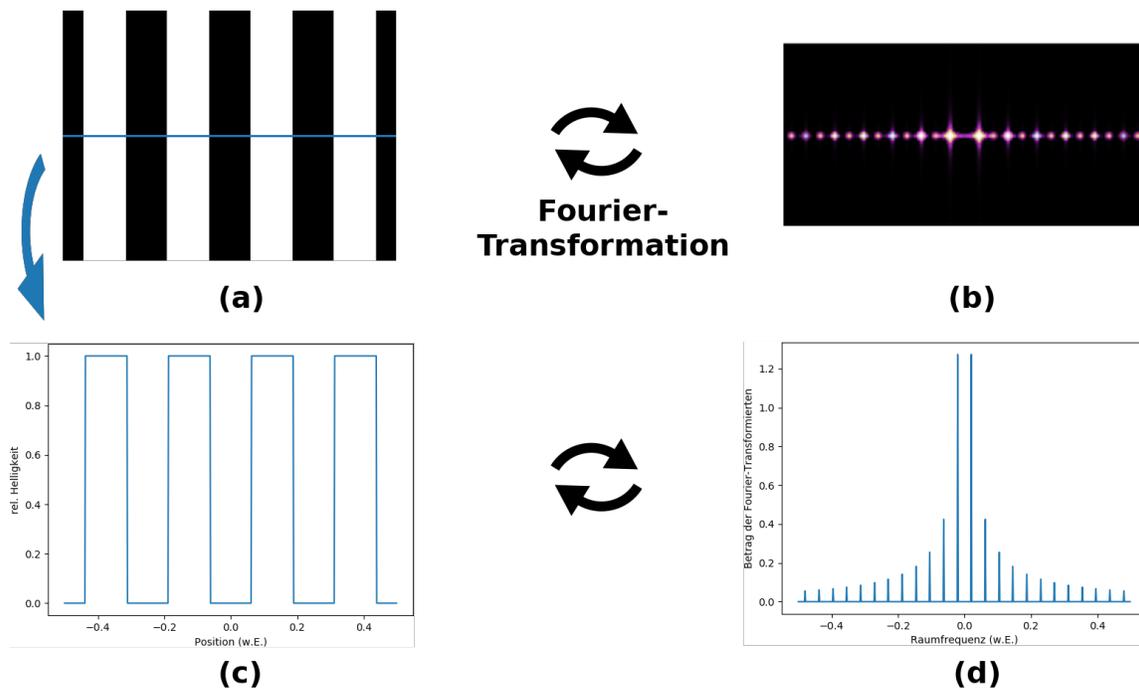


Abbildung 2.2: Zur Veranschaulichung der 2D-Fourier-Transformation. (a) zeigt ein Gitter-Muster - das kann als zweidimensionale Helligkeitsverteilung aufgefasst werden. Dessen zweidimensionale Fourier-Transformierte ist in (b) zu sehen. (Erstellt mit dem Programm Gwiddion; die Helligkeit codiert den Anteil der vorhandenen Raumfrequenzen.) In (c) ist das (eindimensionale) Helligkeitsprofil von (a) entlang der eingezeichneten blauen Linie zu sehen, (d) zeigt dessen aus Abschnitt 2.1 bekannte (1D-)Fourier-Transformierte.⁶

Das Helligkeitsprofil des Gitters kann aber nicht nur senkrecht zu seinen Gitterlinien analysiert werden, sondern auch parallel dazu (nicht sehr spannend) oder auch in diagonalen Richtungen. Dasselbe gilt natürlich für jede andere zweidimensionale Verteilung, z.B. auch für beliebige Bilder. Zur Untersuchung zweidimensionaler Strukturen auf deren Raumfrequenzen wird die zweidimensionale Fourier-Transformation verwendet, wie sie in Gleichung (2.7) zu sehen ist. Dabei ist $s(x, y)$ das zu untersuchende von zwei Variablen abhängigen Signal, u und v sind die zu den Variablen x und y gehörigen Frequenzen. Sind die Variablen beispielsweise die räumliche x - und y -Koordinate in der Bildebene eines Bildes, sind u und v die Raumfrequenzen in x - und y -Richtung.

werden fourierkonjugierte Größen; deren Produkt ist stets dimensionslos [z.B. (Zeit, Frequenz) oder (Ort, Raumfrequenz)].

⁶Im Gegensatz zu Abbildung 2.1 sind hier auch negative Raumfrequenzen aufgetragen, um den Ver-

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) \cdot \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy \quad (2.7)$$

gleich mit der Darstellung des Programms Gwyddion zu erleichtern. Im Kontext zeitlicher Signale wird oft auf negative Frequenzen verzichtet, wohingegen es bei Raumfrequenzen wenig Grund gibt, die positive x-Richtung der negativen vorzuziehen. Wegen z.B. $\sin(kx) = -\sin(-kx)$ können in Bezug auf die Verwendung von Vorzeichen verschiedene äquivalente Darstellungen der Fourier-Transformation gewählt werden.

Kapitel 3

Die Fourier-Transformation in der Bildbearbeitung

Die Fourier-Transformation kann auf verschiedenen Weisen in der Bildbearbeitung eingesetzt werden, von denen eine im vorgestellten Versuch angewandt und deshalb hier vorgestellt wird. Zwei weitere Konzepte werden in Abschnitt C im Anhang kurz angerissen, um dem interessierten Leser einen groben Überblick über die Bedeutung der Fourier-Transformation für die Bildbearbeitung zu vermitteln.

3.1 Fourier-Filter: Hoch- und Tiefpassfilter

Das Prinzip des Hoch- und des Tiefpassfilters sollten aus der analogen Signalverarbeitung bereits bekannt sein: aus einem Signal, das einen solchen Filter passiert, werden alle tiefen (bzw. hohen) Frequenzanteile herausgefiltert, z.B. um unerwünschtes Rauschen in diesen Frequenzbereichen zu eliminieren. Werden analoge Spannungssignale verarbeitet, ist die Verwendung eines RC-Hoch-/Tiefpasses oder ähnlicher Bauteile meist sehr einfach, günstig und effektiv. Um in der Bildbearbeitung einen vergleichbaren Effekt zu erzielen, bedient man sich der Fourier-Transformation.

Berechnet man für ein Bild die Fourier-Transformation, kann man alle tiefen (oder hohen) Raumfrequenzen aus dem Bild entfernen, indem man sie im Frequenzraum einfach entfernt und danach eine Rücktransformation durchführt. Durch Entfernen der hohen Raumfrequenzen (Tiefpass) werden aus dem Bild alle scharfen Kanten entfernt und das Bild wird „weicher“. Der Prozess ist deshalb als *Weichzeichnen*¹ bekannt. Das führt auch zum in Abschnitt 2.2 bereits erwähnten Gibbsschen Phänomen. Werden andererseits die tiefen Raumfrequenzen entfernt (Hochpass), bleiben nur die Kanten übrig und das entstehende Muster nimmt überall dort große Werte an, wo zuvor ein scharfer Übergang von einem in

¹In der Bildbearbeitung ist dies nur eine von mehreren Techniken, die als „Weichzeichnen“ bezeichnet werden.

den anderen Bereich war (z.B. von schwarz zu weiß). Dieser Prozess wird *Kantenschärfen* genannt. Wie sich diese beiden Vorgänge auswirken, ist in Abbildung 3.1 anhand der ein-dimensionalen Fourier-Transformation einer Rechtecksschwingung veranschaulicht.

Die Konzepte der Fourier-Filterung funktionieren analog auch mit der zweidimensionalen Fourier-Transformation. Wie eine zweidimensionale Bilddatei aussieht, nachdem eine Fourier-Filterung angewandt wurde, können Sie am Computer mit dem kostenfreien Programm *Gwyddion* ausprobieren. Eine ausführliche und bebilderte Beschreibung zur Durchführung einer Fourier-Filterung mit diesem Programm finden Sie im Anhang in Abschnitt A.

Bei Verwendung des Programms *Gwyddion* zur Fourier-Filterung berechnet Ihr Computer (zweimal) eine Fourier-Transformation des gesamten Bildes. Insbesondere bei der verlustfreien Bearbeitung hochaufgelöster Bilder bedeutet das eine Menge Rechenaufwand. Im Versuch werden Sie eine elegante Methode kennen lernen, wie die Fourier-Transformation ganz ohne Berechnung durchgeführt werden kann. Um das zu verstehen, müssen wir in den Kapiteln 4 und 5 zunächst das Beugungsintegral einführen und im Anschluss auf eine Linse anwenden.

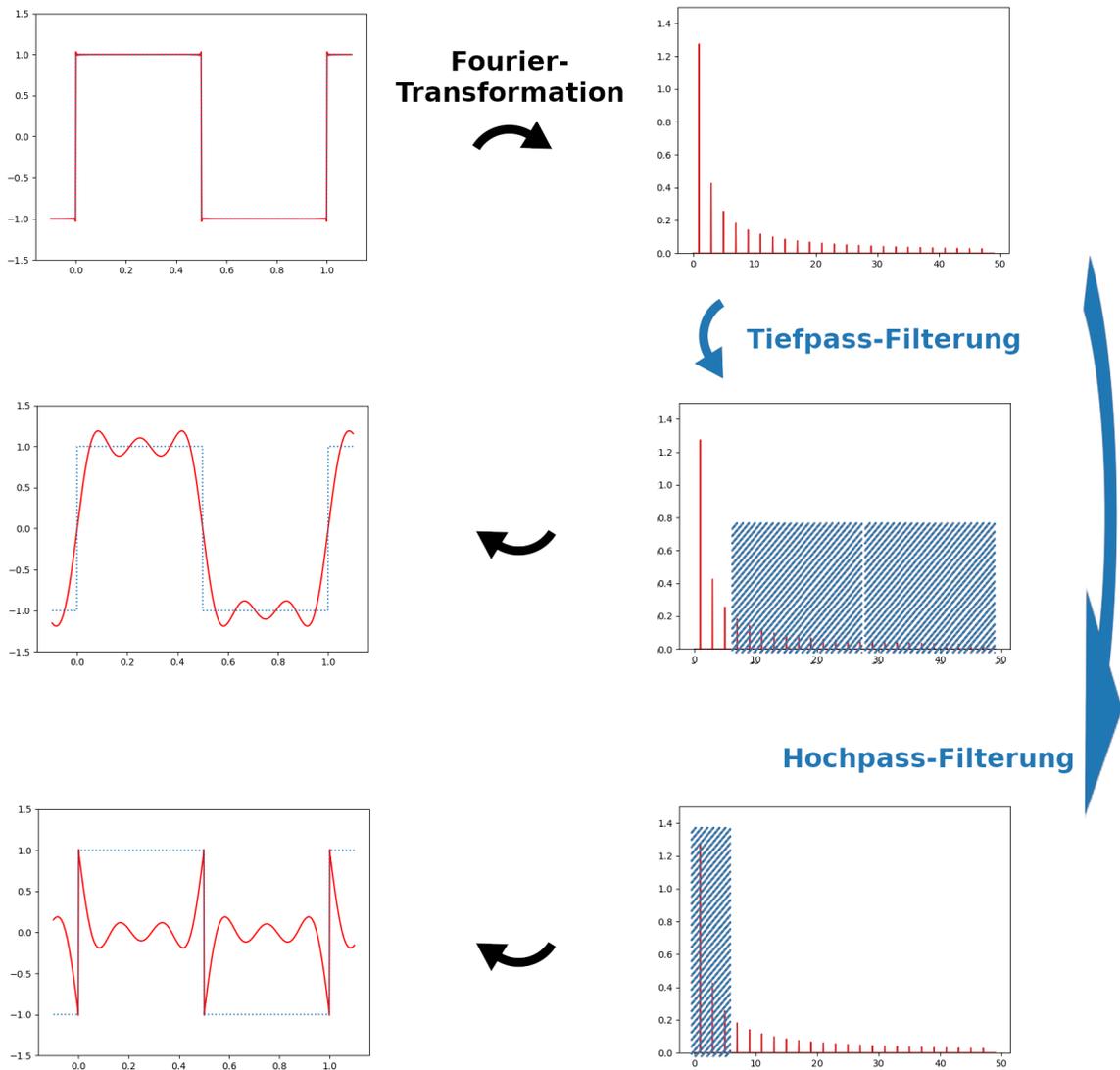


Abbildung 3.1: Zur Veranschaulichung der Fourier-Filterung anhand der 1D-Fourier-Transformation einer Rechtecksschwingung. *Im Uhrzeigersinn:* Oben links ist eine aus 1200 Sinusschwingungen synthetisierte Rechtecksschwingung zu sehen, oben rechts die zugehörige Fourier-Transformation. (Der Übersichtlichkeit halber endet das Diagramm bei der 50-fachen Eigenfrequenz.) In der zweiten Zeile wird rechts im Frequenzraum eine Tiefpass-Filterung durchgeführt, d.h. hohe Frequenzanteile werden gelöscht (blau schraffiert), tiefe Frequenzen bleiben unverändert. Durch die Rücktransformation der unschraffierten Frequenzen erhält man eine „weichere“ Figur. In der dritten Zeile wird stattdessen eine Hochpass-Filterung angewandt, wodurch in der Rücktransformierten die Kanten hervorgehoben werden.

Kapitel 4

Beugungsintegrale und die Fourier-Transformation

Wir gehen für diesen Versuch davon aus, dass die Grundlagen der Beugung bekannt sind, dass der Leser also bereits eine Einführung in die Beugung z.B. am Spalt und am Gitter erhalten hat. Die auftretenden Beugungsbilder werden zur Einführung (z.B. auch in der Schule) oft mit Hilfe von Elementarwellen erklärt, die von jeder Stelle des Spaltes ausgehen. Aus einfachen geometrischen Überlegungen kann dabei der Phasenversatz der einzelnen Elementarwellen am Beobachtungsschirm errechnet werden. Beispielhaft für einen solchen Erklärungsansatz ist Abbildung 4.1, die aus (Demtröder, 2013) entnommen ist. Dieser Erklärungsansatz ist sehr gut zur Einführung einfacher Beugungsbilder geeignet, da er sehr anschaulich ist und mit Mathematik der Oberstufe auskommt. Andererseits ist seine Anwendbarkeit jedoch auf sehr einfache Situationen beschränkt. Um die Fourier-Optik zu verstehen, müssen wir zunächst das Verständnis für das Phänomen der Beugung auf breitere Füße stellen, indem wir das Kirchhoffsche Beugungsintegral näher betrachten und die Abschätzungen von Fresnel und Fraunhofer einführen.

4.1 Kirchhoffsches Beugungsintegral

Das *Kirchhoffsche Beugungsintegral*¹ (4.1) ist eine sehr allgemeine Betrachtungsweise des Phänomens Beugung, mit dem im Prinzip das Beugungsbild einer beliebig geformten Öffnung bestimmt werden kann. Es leitet sich aus dem *Huygensschen Prinzip* her. Das besagt, dass zur Berechnung der Fortpflanzung von Wellenerscheinungen jeder Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer eigenen Elementarwelle angesehen werden kann. Das gesamte Wellenbild kann dann durch Addition aller Elementarwellen von jedem Punkt

¹Die Diskussion des Beugungsintegrals folgt der Darstellung in (Demtröder, 2013). Weitere Bücher, die die Inhalte dieses Theorie-Kapitels behandeln, sind z.B. (Hecht und Zajac, 1974) [Kapitel 10 für Beugung und Kapitel 11 für Fourier-Optik], sowie (Goodman, 2005).

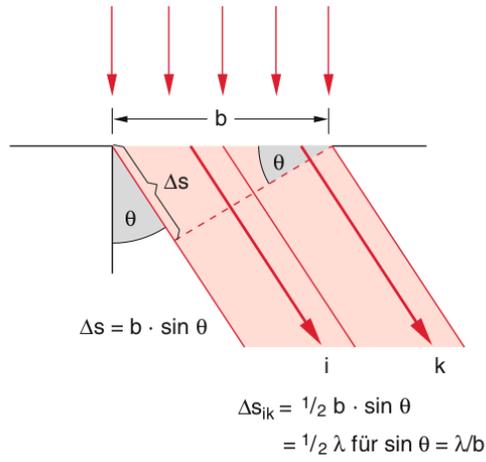


Abbildung 4.1: Ein übliches Bild zur Erklärung der Beugung am Einzelspalt mithilfe der geometrischen Optik, aus Demtröder (2013, S. 322).

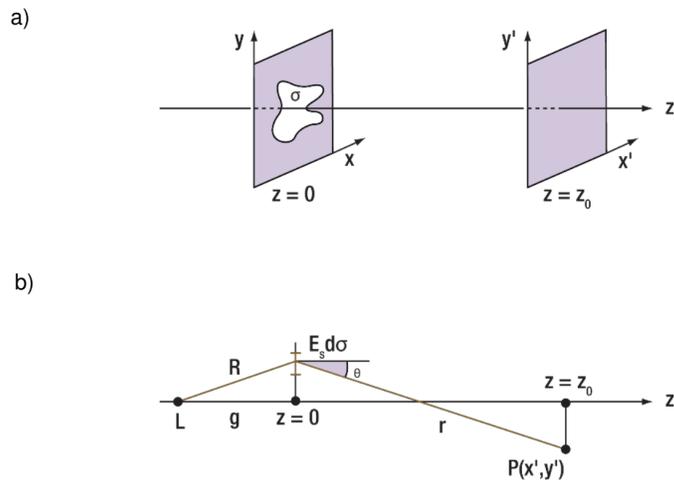


Abbildung 4.2: (a) Blende mit beliebiger Öffnung σ und (b) Seitenansicht mit Quelle bei L . Aus Demtröder (2013, S. 331).

der Wellenfront errechnet werden. Diese indirekte Methode ist häufig nützlich, um zu berechnen, wie sich Hindernisse oder Blenden auf die Ausbreitung der Welle auswirken. Das Beugungsbild einer beleuchteten Blende wird mit diesem Prinzip errechnet, indem jeder Punkt der Blende als Ausgangspunkt einer eigenen sich in Richtung des Schirms bewegenden Elementarwelle angesehen wird und all diese Beiträge addiert (bzw. integriert) werden. Durch Verwendung komplexer Zahlen kann dabei relativ einfach die unterschiedliche Phase unterschiedlicher Teilwellen berücksichtigt werden.² In diesem Kapitel werden die Notationen aus Abbildung 4.2 verwendet, in dem die allgemeine Situation für eine beliebig geformte Blende skizziert ist.

$$E(x', y', z_0) = \iint \frac{i \cos \Theta}{\lambda} \cdot E(x, y, 0) \cdot \frac{\exp[-ikr]}{r} dx dy \quad (4.1)$$

Das Kirchhoffsche Beugungsintegral, wie es in Gleichung (4.1) dargestellt ist, dient dazu, die Stärke des elektrischen Feldes $E(x', y', z_0)$ an einem beliebigen Punkt $P(x', y', z_0)$ in der Beobachtungsebene $z = z_0$ zu bestimmen. Es besteht aus vier Teilen:

- Der Term $i \cos \Theta / \lambda$ mit $\cos \Theta = z_0 / r$ soll hier nicht im Detail erklärt werden. Er hat damit zu tun, dass die Huygensschen Elementarwellen bevorzugt in die Richtung abgestrahlt werden, aus der die sie erzeugenden Primärwellen kommen. Somit werden Wellen nicht grundlos „aus dem nichts“ zurück in die Quelle reflektiert. Für eine ausführliche und exakte Herleitung dieses Ausdrucks wird hier auf Literatur zu Fresnelschen Zonen und Fresnel-Beugung verwiesen.³
- $E(x, y, 0)$ ist die Feldstärkeverteilung in der Ebene $z = 0$, in der die Blende steht; es beschreibt also das Licht, das durch die Blende fällt. In der hier verwendeten Darstellung ist das eine komplexe Zahl und über den Bereich der Blende können im Allgemeinen sowohl die Amplitude als auch die Phase variieren.
- Der Term $\exp[-ikr] / r$ mit $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z_0^2}$ beschreibt den Einfluss der Feldstärke jedes Punktes der Blende $(x, y, 0)$ auf die Feldstärke am untersuchten Ort (x', y', z_0) . Gemäß dem Huygens'schen Prinzip breiten sich hier Kugelwellen aus, deren Amplitude mit $\frac{1}{r}$ abnimmt und deren Phase wie $\exp[-ikr]$ rotiert.
- Die Integration über die gesamte Blendenöffnung liefert die gesuchte Feldstärke in der Bildebene.

²Obwohl das elektrische Feld eigentlich eine vektorielle Größe ist, werden hier zur Übersichtlichkeit lediglich komplexe Skalare zur Darstellung verwendet. Die Polarisation des Lichts kann in dieser Beschreibung deshalb nicht berücksichtigt werden. Das ist kein Problem, da sie im hier vorgestellten Versuch, wie in vielen Beugungsversuchen, keine Rolle spielt.

³Z.B. (Demtröder, 2013), Abschnitt 10.6.1. oder (Hecht und Zajac, 1974), Abschnitt 10.3.

4.2 Fresnel-Beugung und Fraunhofer-Beugung

Bei der Auswertung des Integrals von Gleichung (4.1) macht der Term $1/r \cdot \exp[-ikr]$ mit $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_0^2}$ praktische Schwierigkeiten, sodass dieser im folgenden durch mehrere Näherungen vereinfacht werden soll. Zunächst entwickeln wir $r(u) = z_0\sqrt{1+u}$ mit $u = [(x-x')^2 + (y-y')^2]/z_0^2$ um $u = 0$ bis zur ersten Ordnung und erhalten Gleichung (4.2). Diese Näherung gilt für kleine u , d.h. so lange der Abstand z_0 zwischen Blenden- und Beobachtungsebene deutlich größer ist als die Blende und die Ausdehnung des beobachteten Beugungsmusters.

$$r \approx z_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}u\right) = z_0 \left(1 + \frac{(x-x')^2}{2z_0^2} + \frac{(y-y')^2}{2z_0^2}\right) \quad (4.2)$$

Diese Näherung setzen wir in Gleichung (4.1) im Term der Phase des gebeugten Lichts $\exp[-ikr]$ ein. Für den Term $1/r$, der die Amplitude beschreibt, kann man noch einen Schritt weiter gehen und sogar die Näherung zur Nullten Ordnung, $r \approx z_0$, einsetzen. Die Amplitude kann gröber genähert werden, denn entscheidend für das Interferenzmuster des gebeugten Lichts sind vorrangig die Phasenunterschiede, die sich auch bei sehr kleinen Weglängendifferenzen bemerkbar machen und für Beugungs- und Interferenzphänomene die dominierende Rolle spielen; die Amplitude ist von sehr kleinen Wegunterschieden kaum beeinflusst. Der Term $\cos \Theta = z_0/r \approx 1$ kann mit analogen Überlegungen ebenfalls grob genähert werden. Auf diese Weise erhält man die *Fresnel-Näherung* des Beugungsintegrals:

$$E(x', y', z_0) = \frac{ie^{-ikz_0}}{\lambda z_0} \int \int E(x, y, 0) \cdot \exp \left[\frac{-ik}{2z_0} ((x-x')^2 + (y-y')^2) \right] dx dy \quad (4.3)$$

Die Fresnel-Näherung kann zur Beschreibung des Beugungsbildes relativ nahe hinter der Blende verwendet werden ($b \ll z_0 \ll b^2/\lambda$, wobei b der maximale Durchmesser der Blende ist). Für größere Entfernungen ($z_0 \gg b^2/\lambda$) beschreibt die Fraunhofer-Näherung das Beugungsbild besser, welche durch eine weitere Näherung wie folgt aus der Fresnel-Näherung hervor geht:

In großer Entfernung von der Blende wird das Beugungsbild deutlich größer als die Blende selbst. Multipliziert man in (4.2), der Näherung für r , die quadrierten Klammern aus, kann man wegen der relativen Kleinheit der Blendendimensionen die quadratischen Terme in x und y vernachlässigen gegen die Terme mit x'^2 , y'^2 , xx' und yy' und erhält Gleichung (4.4), was eingesetzt in das Fresnel-Beugungsintegral (4.3) zu Gleichung (4.5) führt. (Da die Integration über die ungestrichenen Variablen ausgeführt wird, können Terme die nur gestrichene Variablen enthalten, vor das Integral geschrieben werden.) Diese Gleichung wird auch die Fraunhofer-Näherung des Beugungsintegrals genannt.

$$r \approx z_0 \left(1 - \frac{xx'}{z_0^2} - \frac{yy'}{z_0^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z_0^2} + \dots\right) \quad (4.4)$$

$$E(x', y', z_0) = A(x', y', z_0) \cdot \int \int E(x, y, 0) \cdot \exp \left[\frac{+ik}{z_0} (xx' + yy') \right] dx dy \quad (4.5)$$

mit $A(x', y', z_0) = \frac{ie^{-ikz_0}}{\lambda z_0} \cdot \exp \left[\frac{-ik}{2z_0} (x'^2 + y'^2) \right]$

4.3 Fraunhofer-Beugung und Fourier-Transformation

Verleicht man die Gleichungen (2.7) und (4.5), so ist zu erkennen, dass die Feldstärkeverteilung in der Beobachtungsebene $z = z_0$ im Wesentlichen der Fourier-Transformierten der Feldstärkeverteilung in der Blendenebene $z = 0$ entspricht. (Es unterscheiden sich Vorfaktoren und Vorzeichen in der Transformation.) Die Gleichungen sind hier noch einmal übereinander dargestellt:

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) \cdot \exp \{-i2\pi(ux + vy)\} dx dy \quad (2.7)$$

$$E(x', y', z_0) = A(x', y', z_0) \cdot \int \int E(x, y, 0) \cdot \exp \left[\frac{+ik}{z_0} (x'x + y'y) \right] dx dy \quad (4.5)$$

4.4 Das Babinet'sches Theorem

Das *Babinet'sche Theorem* (oder -Prinzip) macht eine Aussage über das Beugungsbild *komplementärer* Blenden. Blenden werden komplementär genannt, wenn die eine genau an den Stellen transparent ist an denen die andere undurchsichtig ist, und umgekehrt. Beispiele für Paare komplementärer Blenden sind ein Spalt und ein ebenso dickes Haar oder eine Lochblende und eine Kreisscheibe gleichen Radius. Das Babinet'sche Theorem besagt, dass das Beugungsbild komplementärer Blenden im Wesentlichen identisch ist.

Um das genauer zu untersuchen, stellen wir uns die Situation aus Abbildung 4.2 vor, in der Licht durch eine Blende σ_1 in die Beobachtungsebene fällt. Mit Gleichung (4.1) können wir die Feldstärkeverteilung $E_1(x', y', z_0)$ in der Beobachtungsebene berechnen. Dasselbe gilt für die Feldstärkeverteilung $E_2(x', y', z_0)$, die mit der komplementären Blende σ_2 gemessen würde. Die Öffnungen beider Blenden ergäben zusammen die gesamte Blendenebene, sodass wegen des Superpositionsprinzips [bzw. der Linearität des Integrals (4.1)] die Summe beider Verteilungen gerade die Verteilung E_0 ergibt, die ohne Blende gemessen würde.

$$E_1 + E_2 = E_0 \quad (4.6)$$

Nimmt man nun an, dass ohne beugende Struktur die Feldstärke E_0 an fast allen Orten (näherungsweise) Null wäre, ergibt sich $E_2 = -E_1$. Da wir in der Optik in der Regel die Intensität I , das Betragsquadrat der Feldstärke, messen, erhält man so $I_2 = I_1$. Das gilt

aber nur dort, wo die Feldstärke ohne Beugung Null wäre, weshalb oft auch die Formulierung verwendet wird, die Beugungsbilder komplementärer Blenden wären „außerhalb des Bereiches, in den die geometrisch-optische Abbildung fällt“ (Wikipedia, 2021a) gleich.

In Abschnitt 6.2.2 wird beschrieben, wie mithilfe des Versuchs zur Fourier-Optik das Babinet'sche Theorem verifiziert werden kann. Zuvor müssen wir jedoch die Linse noch einmal ausführlich unter die Lupe nehmen.

Kapitel 5

Linsen und Fourier-Transformation

Ähnlich wie das Beugungsmuster in Abschnitt 4 mit dem Beugungsintegral berechnet wurde, können wir auch die Feldstärkeverteilung des Lichts nach Durchgang durch eine Linse berechnen. Dabei müssen wir jedoch beachten, dass eine Linse nicht nur eine Öffnung darstellt, sondern auch die Phase des hindurchtretenden Lichts in bestimmter Weise verzögert. Diese Verzögerung wird durch die langsamere Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium erzeugt, aus dem die Linse besteht und bewirkt, dass bei Beleuchtung der Linse mit einer Kugelwelle aus dem Brennpunkt auf der anderen Seite eine ebene Welle austritt. (Das entspricht in der geometrischen Optik Strahlen aus dem Brennpunkt, die als parallele Strahlen austreten.)

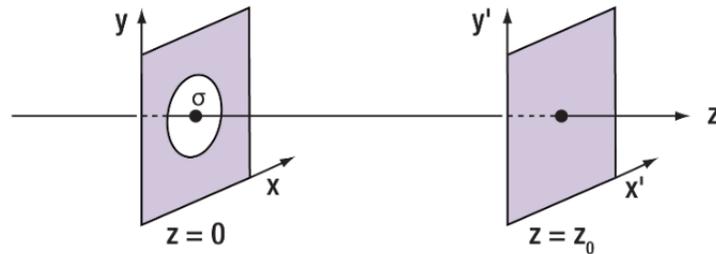


Abbildung 5.1: Eine runde Öffnung zur Symbolisierung einer Linse. Wie verändert die Linse die Phase des hindurchscheinenden Lichts? Das wird in diesem Kapitel untersucht.

5.1 Phasenänderung beim Durchtritt durch die Linse

Um die Wirkung einer Linse mit dem aus dem vorigen Kapitel bekannten Formalismus beschreiben zu können, müssen wir zunächst die Phasenänderung beim Durchgang durch die Linse mathematisch beschreiben. Gesucht ist eine Funktion $\tau(x, y)$, die an die Phase φ_e einer in die Linse einlaufenden Welle multipliziert wird und so die Phase der aus der Linse auslaufenden Welle φ_a ergibt (5.1). Dazu ziehen wir die bekannte Auswirkung der Linse auf eine einlaufende Kugelwelle aus dem Brennpunkt heran, die durch die Linse zu einer ebenen Welle verzerrt wird (zumindest näherungsweise; in der Nähe der optischen Achse).

$$\varphi_e(x, y, 0) \cdot \tau(x, y) = \varphi_a(x, y, 0) \quad (5.1)$$

Die einlaufende Kugelwelle wird von Gleichung (5.2) beschrieben. Die Phase φ_{Kugel} dieser Kugelwelle in Gleichung (5.5) ergibt sich mit der Reihenentwicklung in (4.2) bzw. (5.3). Diese Reihenentwicklung kann angewandt werden, solange nur Licht in der Nähe der optischen Achse betrachtet wird, d.h. solange $x^2 + y^2 \ll f$. Dabei ist zu beachten, dass die verwendete Variable $\hat{z} = z + f$ um den Betrag der Brennweite f der Linse verschoben ist, da sich die Kugelwelle vom Punkt $(0, 0, -f)$ ausbreitet.

$$E_{\text{Kugel}}(r) = \frac{E_0}{r} \exp[-ikr] \quad (5.2)$$

$$\text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + \hat{z}^2} \approx \hat{z} \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2\hat{z}^2} \right) \quad (5.3)$$

$$\text{und } \hat{z} = z + f \quad (5.4)$$

$$\varphi_{\text{Kugel}}(z = 0) \approx e^{-ikf} \cdot \exp \left[\frac{-ik}{2f} (x^2 + y^2) \right] \quad (5.5)$$

Das ausfallende Licht soll eine ebene Welle sein (5.6), sodass sich die Phase wie in Gleichung (5.7) schreiben lässt.

$$E_{\text{ebeneWelle}}(z) = E_1 \cdot \exp[-i(kz + \phi_0)] \quad (5.6)$$

$$\varphi_{\text{ebeneWelle}}(z) = \exp[-i(kz + \phi_0)] \quad (5.7)$$

Durch Vergleich der einfallenden und ausfallenden Welle kann in Gleichung (5.8) die Transmissionsfunktion τ der Linse bestimmt werden. Da sich die Linse nicht für die Form einer einfallenden elektromagnetischen Welle interessiert bzw. jede beliebige elektrische Welle durch Superposition aus Kugelwellen beschrieben werden kann, gilt diese Transmissionsfunktion in der Nähe der optischen Achse für beliebige aus der Brennebene einfallende elektromagnetische Wellen.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{Kugel}}(z=0) \cdot \tau(x, y) &\stackrel{!}{=} \varphi_{\text{ebeneWelle}}(z=0) \\
e^{-ikf} \cdot \exp\left[\frac{-ik}{2f}(x^2 + y^2)\right] \cdot \tau(x, y) &= e^{-i\phi_0} \\
\tau(x, y) &= \exp\left[\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right] \cdot e^{i(kf - \phi_0)} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

5.2 Vergleich der Linse mit der Fourier-Transformation

Setzen wir diese Transmissionsfunktion τ einer Linse mit Brennweite f in die Fresnel-Näherung (siehe Gleichung (4.3)) ein, ergibt sich in der hinteren Brennebene der Linse ($z_0 = f$) daraus die in Gleichung (5.9) dargestellte Feldstärkeverteilung $E(x', y', f)$.

$$\begin{aligned}
E(x', y', f) &= \frac{ie^{-ikf}}{\lambda f} \iint E_e(x, y, 0) \cdot \tau(x, y) \cdot \exp\left[\frac{-ik}{2f}((x - x')^2 + (y - y')^2)\right] dx dy \\
&= \frac{ie^{-ikf}}{\lambda f} \cdot e^{i(kf - \phi_0)} \\
&\quad \cdot \iint E_e(x, y, 0) \cdot \exp\left[\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2) + \frac{-ik}{2f}[(x - x')^2 + (y - y')^2]\right] dx dy \\
&= \underbrace{\frac{ie^{-i\phi_0}}{\lambda f} \exp\left[\frac{-ik}{2f}(x'^2 + y'^2)\right]}_{=: \hat{A}(x', y', f)} \cdot \iint E_e(x, y, 0) \cdot \exp\left[\frac{ik}{f}(xx' + yy')\right] dx dy \\
&= \hat{A}(x', y', f) \cdot \iint E_e(x, y, 0) \cdot \exp\left[\frac{ik}{f}(xx' + yy')\right] dx dy \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Auch diese Gleichung weist mathematisch starke Ähnlichkeit zu (2.7) auf, so dass wir sagen können, die Feldstärkeverteilung $E(x', y', f)$ in der hinteren Brennebene $z = f$ stellt im Wesentlichen die Fourier-Transformierte der einfallenden Feldstärkeverteilung $E(x, y, 0)$ aus der vorderen Brennebene dar. (Es unterscheiden sich Vorfaktoren und Vorzeichen in der Transformation.) Die Gleichungen sind hier noch einmal übereinander dargestellt:

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) \cdot \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy \quad (2.7)$$

$$E(x', y', f) = \hat{A}(x', y', f) \cdot \iint E_e(x, y, 0) \cdot \exp\left[\frac{ik}{f}(xx' + yy')\right] dx dy \quad (5.9)$$

Kapitel 6

Versuchsaufbau

6.1 Basis-Aufbau: Mikroskop mit Köhlerbeleuchtung

Der hier verwendete Aufbau ist im Wesentlichen ein Mikroskop mit Unendlich-Strahlengang und einer Köhlerbeleuchtung, zu dem einige Komponenten zur Beobachtung der Fourier-Ebene hinzugefügt wurden. Hier sollen nun die grundlegenden Anteile des Strahlengangs des Gesamtaufbaus einzeln erläutert werden.

6.1.1 Mikroskop mit Unendlich-Strahlengang

Als Mikroskop bezeichnet man im Allgemeinen ein Gerät, mit dem Objekte, deren Größe unterhalb des Auflösungsvermögens des menschlichen Auges liegt, vergrößert betrachtet werden können. Wir betrachten hier nur den sog. „Unendlich-Strahlengang“, da wir unsere zu vergrößernden Objekte auf einer Kameraschicht abbilden (anstatt sie mit dem bloßen Auge zu betrachten).

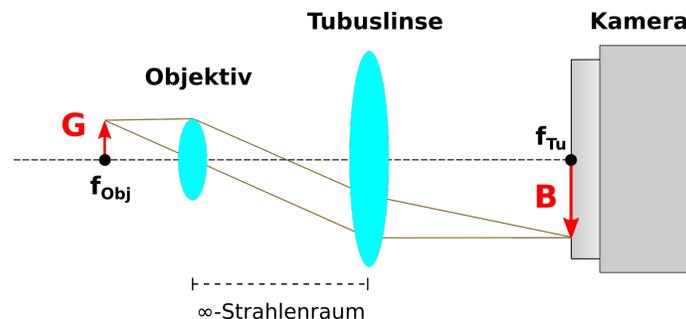


Abbildung 6.1: Skizze eines Mikroskops mit Unendlich-Strahlengang

Hierzu platziert man den zu betrachtenden Gegenstand **G** im Brennpunkt des Objektivs. Dadurch erhält man hinter dem Objektiv (auch Objektivlinse genannt) parallele

Strahlen, also einen Unendlich-Strahlenraum. Mit einer Tubuslinse mit der Brennweite f_{tu} projiziert man dann ein Zwischenbild B direkt auf den Kamerachip. Man benötigt hier keine weitere Vergrößerung mehr wie beim Betrachten mit dem Auge. Ein Vorteil, der aus Abbildung 6.1 sofort ersichtlich wird, ist, dass man die Tubuslinse praktisch in beliebiger Entfernung zum Objektiv platzieren kann, da der Strahlengang hinter dem Objektiv parallel ist. Man kann also die Größe des Aufbaus flexibel gestalten. Es wird z.B. auch ermöglicht, planparallele Komponenten einzubauen (Filter, Strahlteiler, etc.), ohne dass sich die Zwischenbild-Größe oder -Position verändern. Die Vergrößerung des Gegenstands wird bei einer Unendlich-Optik Abbildungsmaßstab genannt und ergibt sich einfach aus dem Verhältnis der Brennweiten von Objektiv- und Tubuslinse:

$$M = \frac{B}{G} = \frac{f_{Tu}}{f_{Obj}} \quad (6.1)$$

6.2 Der 4f-Aufbau mit Fourier-Filterung

Die Erkenntnis, dass eine Linse eine Fouriertransformation der einfallenden Feldstärkeverteilung bewirkt soll im Versuch ausgenutzt werden, um ganz ohne zu rechnen Fourier-Transformationen und Fourier-Filterungen verschiedener Muster durchzuführen. Im Versuch wird dazu der sogenannte *4f-Aufbau* verwendet, wie er schematisch in Abbildung 6.2 zu sehen ist. Ein beliebiges Bild in der Objektebene wird hierbei zunächst von einer Linse in die Fourier-Ebene transformiert, wo Manipulationen vorgenommen werden können. Eine zweite Linse führt dann die Rücktransformation in die Bildebene durch.

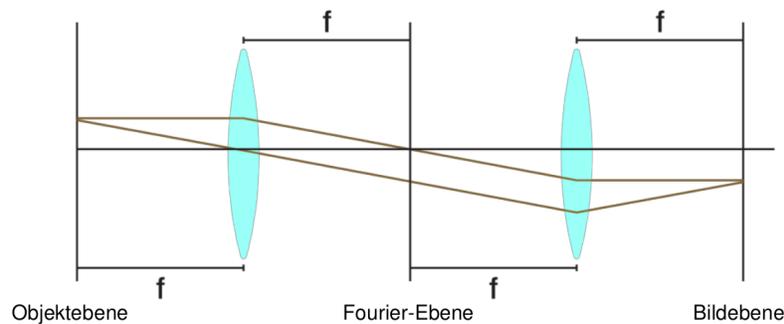


Abbildung 6.2: Prinzipskizze des 4f-Aufbaus zur Fourier-Optik. Das Bild eines Objekts in der Objektebene wird durch die erste Linse Fourier-transformiert in die Fourier-Ebene abgebildet. Hier können z.B. Fourier-Filter angewandt werden, bevor das Bild von der zweiten Linse erneut Fourier-transformiert (rücktransformiert) wird und somit wieder „normal“ in der Bildebene zu sehen ist.

Im Folgenden wird kurz beschrieben, wie die bereits kennen gelernten Konzepte im Versuch umgesetzt werden können. Mit dem Programm Gwyddion können bereits zuhause

die Effekte verschiedener Fourier-Filter untersucht werden können. Eine Anleitung dazu findet sich in Abschnitt A im Anhang.

6.2.1 Fourier-Filterung im Versuch

In Abschnitt 3.1 sind die Grundzüge der Fourier-Filterung erklärt. Im Versuch können in der Fourier-Ebene beliebige Manipulationen durchgeführt werden, z.B. auch die bereits erwähnte Hoch- und Tiefpassfilterung durch den Einsatz von Kreis- oder Lochblenden. Es stehen aber auch andere Blenden zur Verfügung, z.B. eine Spaltblende verstellbarer Größe, mit deren Hilfe ein Kreuzgitter zu einem Liniengitter gefiltert werden kann.

Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 6.3 exemplarisch eine Tiefpassfilterung gezeigt, die mit dem Programm Gwyddion erstellt wurde. Sie können gerne zuhause versuchen andere Effekte mit diesem Programm zu erzielen, z.B. ein Kreuzgitter in ein Liniengitter umzuwandeln. Eine ausführliche Anleitung für das Programm Gwyddion finden Sie im Anhang in Abschnitt A.

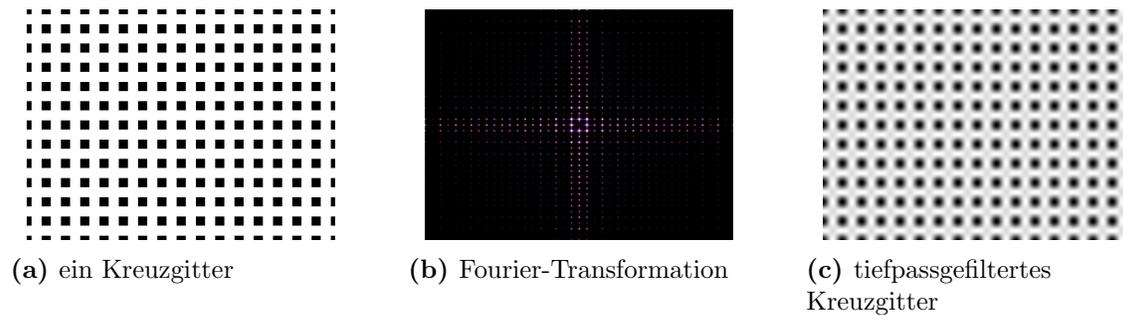


Abbildung 6.3: Tiefpassfilterung eines Kreuzgitters mithilfe des Programms Gwyddion.

6.2.2 Das Babinet'sche Theorem im Versuch

In Abschnitt 4.4 wurde das Babinet'sche Theorem erläutert, das besagt, die Beugungsbilder komplementärer Blenden unterscheiden sich nur im Bereich der geometrisch optischen Abbildung. Da das Fraunhofer-Beugungsbild näherungsweise mit der Fourier-Transformation übereinstimmt (siehe Abschnitt 4.3), kann das Theorem im Versuch geprüft werden. Dazu gibt es eine Blende, die aus zueinander komplementären Bereichen besteht. Die geometrisch-optische Abbildung kann in der Fourier-Ebene durch eine Kreisblende im Fokus der Linse blockiert werden, sodass anhand der Unterschiede in den Bereichen nach der Rücktransformation die Gültigkeit des Babinet-Theorems überprüft werden kann.

6.3 Die Köhlerbeleuchtung

Möchte man ein Objekt in einem Mikroskop beobachten, hat man in der Regel das Problem, dass die beleuchtende Lichtquelle selbst eine gewisse Ausdehnung und Struktur hat (hier: LED-Chip), was zu einer ungleichmäßigen Beleuchtung des Objekts führt, ggf. eine Hitzeeinwirkung auf das Objekt hat und Streulicht auftritt. Das „Objekt“ ist in unserem Versuch das Target mit den verschiedenen Gittern, Formen, etc. Gängige Praxis in der Mikroskopie ist heute meist die sog. „Köhlersche Beleuchtung“ (benannt nach deren Entwickler August Köhler). Das Beleuchtungssystem besteht im Wesentlichen aus einer zur Lichtquelle und zum Kondensator zusätzlichen Linse, des Kollektors, und zwei Blenden, der Apertur- und der Feldblende. Der Kollektor ist in unserem Aufbau direkt an die LED angebaut und muss daher im Versuch nicht extra in den Strahlengang eingebaut (und ist auch in den entsprechenden Abbildungen nicht extra aufgeführt).

Aperturblende

Zunächst wird die Lichtquelle mit Hilfe des Kollektors in die Ebene der Aperturblende abgebildet, die in der Brennebene des Kondensators steht (s. Abbildung 6.4). Durch diesen Trick, das Bild der Lichtquelle zur Beleuchtung des Objekts (hier: unseres Targets) zu nutzen, muss man nicht die Lichtquelle selbst in die Brennebene des Kondensators stellen und Gefahr laufen, das Objekt zu überhitzen. Über den Durchmesser der Aperturblende kann man nun die Apertur (Winkel der Randstrahlen) so einstellen, dass sie an die Apertur des Objektivs angeglichen wird. Die auf dem Objekt ausgeleuchtete Fläche bleibt dabei unverändert.

Abbildung 6.4 zeigt in zwei Momentaufnahmen die Situation bei a) weit geöffneter und b) weniger weit geöffneter Aperturblende. Es wird dadurch jeweils ein größerer (a) bzw. kleinerer (b) Teil der Lichtquelle abgebildet und der Winkel der Randstrahlen nach dem Kondensator wird folglich kleiner bzw. steiler (α oder größer bzw. flacher (β). Der Ausleuchtungsbereich in der Objektebene bleibt dabei immer gleich groß, unabhängig von der Öffnung der Aperturblende.

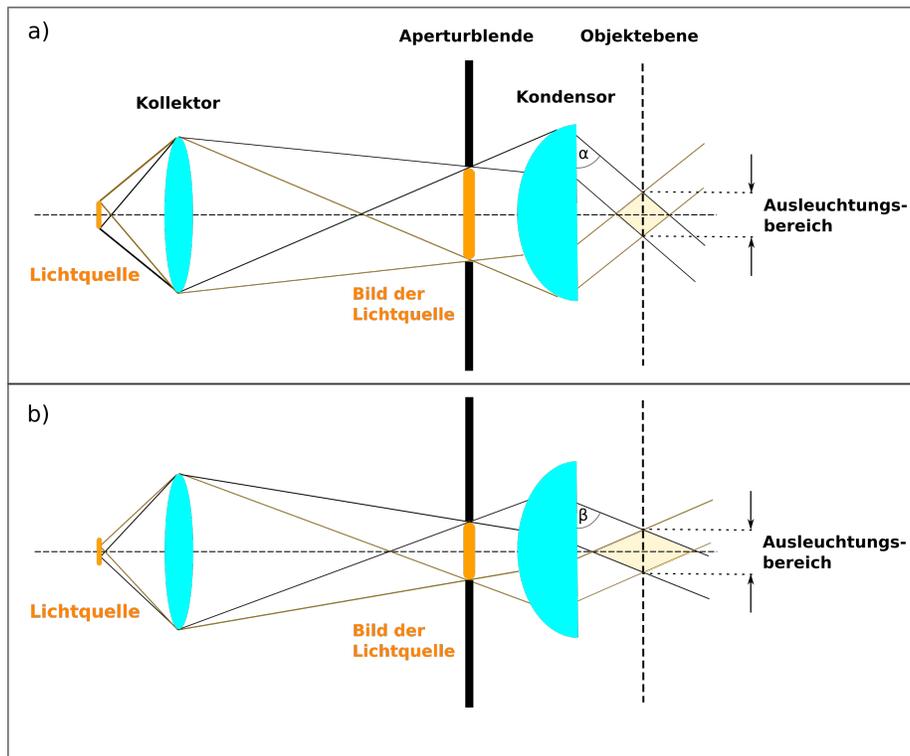


Abbildung 6.4: Abbildung der Lichtquelle auf die Aperturblende – verändert man die Blendengröße, so ändert sich der Einfallswinkel der Randstrahlen in der Objekzebene, jedoch nicht die ausgeleuchtete Fläche. a) und b) zeigen Momentaufnahmen für eine unterschiedlich weit geöffnete Aperturblende

Feldblende

Die Feldblende wird so zwischen dem Kollektor und der Aperturblende eingebracht, dass ihr Bild in der Ebene des zu untersuchenden Objekts liegt (s. Abbildung 6.5, die Aperturblende wurde der Übersichtlichkeit halber in dieser Abbildung weggelassen). Sie wird über den Kondensator dorthin abgebildet. Über den Durchmesser der Feldblende kann man die auf dem Objekt ausgeleuchtete Fläche einstellen, die Winkel der Randstrahlen (Apertur) darauf bleiben dabei gleich. Dadurch kann störendes Streulicht eliminiert werden. Im Grunde könnte man dazu eine Blende direkt in die Objekzebene stellen. Da dies aber wenig praktikabel ist, bedient man sich des Tricks, die Feldblende außerhalb der Objekzebene zu positionieren und sie darin abzubilden.

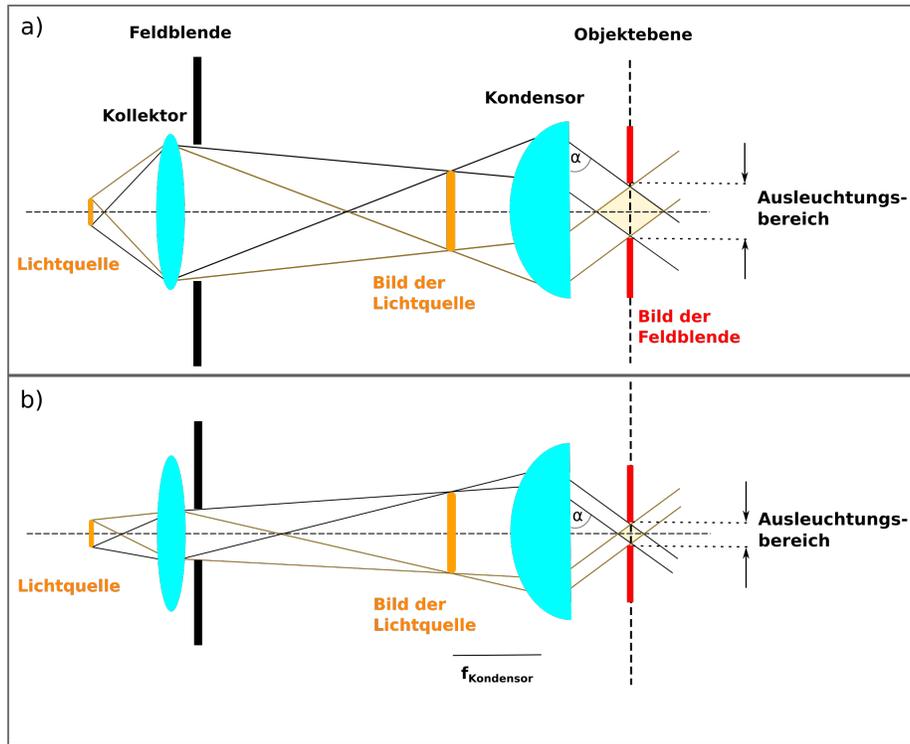


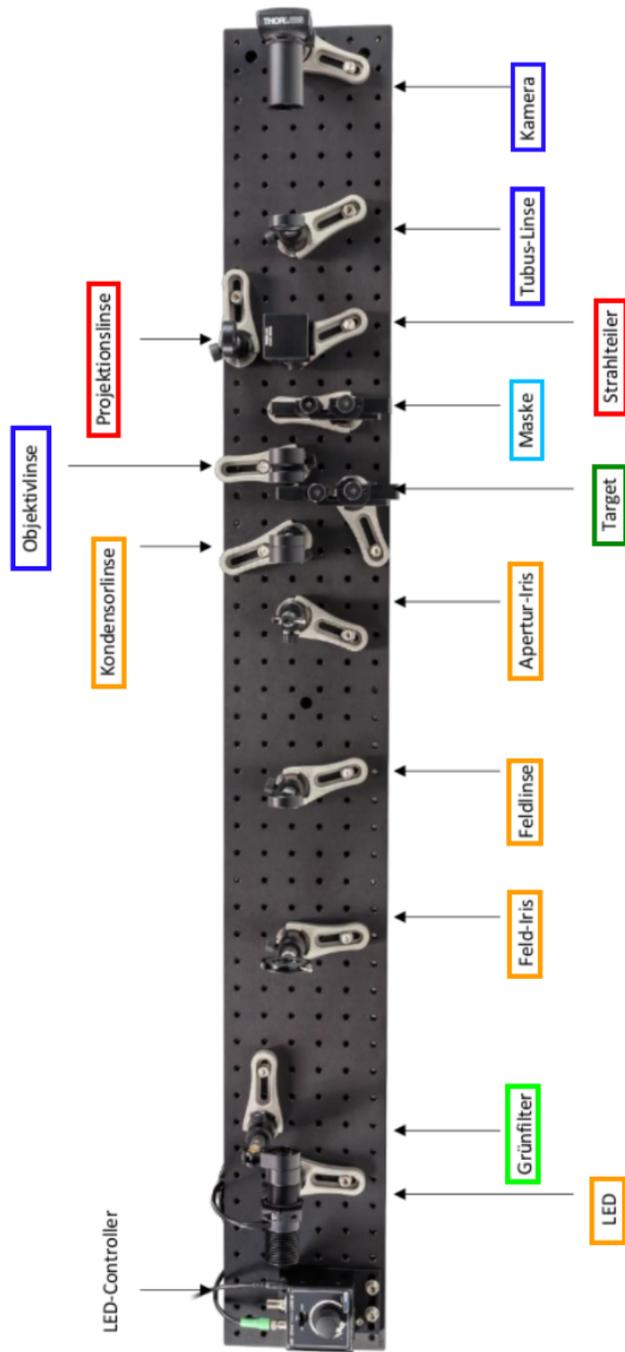
Abbildung 6.5: Abbildung der Feldblende in die Objektebene mit Hilfe des Kondensors – verändert man die Blendengröße, so ändert sich die ausgeleuchtete Fläche in der Objektebene, jedoch nicht die Apertur (Winkel der Randstrahlen) der Beleuchtung (Aperturblende hier nicht eingezeichnet). a) und b) zeigen Momentaufnahmen

Anmerkung: Im Praktikumsaufbau ist in der Köhlerbeleuchtung noch eine zusätzliche Feldlinse zwischen Feld- und Aperturblende eingebaut, die in den obigen Betrachtungen nicht vorkommt. Sie dient zur weiteren Verbesserung der Beleuchtung durch eine zusätzliche Fokussierung und Erhöhung der Lichtintensität.

6.4 Zusammengefasst: Gesamtaufbau

In Abbildung 6.6 ist ein Bild des gesamten Versuchsaufbaus zu sehen. Die Komponenten zur Köhlerbeleuchtung, zur Abbildung des Objekts in die Kamera und zur Abbildung der Fourier-Ebene auf den Schirm sind jeweils farblich markiert.

Abbildung 6.6



Komponenten der **Köhlerbeleuchtung**

Komponenten zur **Abbildung des Target-Objekts in die Kamera**

Auf dem **Target** befinden sich die zu untersuchenden Objekte

Komponenten zur **Abbildung des Beugungsmusters in der Fourierebene auf einen Schirm** senkrecht zum Hauptstrahlengang (Schirm hier nicht im Bild)

Die Maske (oder der Spalt) steht in der Fourier-Ebene - hier kann das Beugungsbild manipuliert werden
Der **Grünfilter** schränkt die Bandbreite des Lichts ein

Anhang A

Das Programm Gwyddion

Das Programm *Gwyddion* ist ein freies Programm zur Bildbearbeitung, das für die Datenauswertung in der Rastersondenmikroskopie (SPM - scanning probe microscopy) geschrieben wurde. Es hat viele Funktionen, von denen uns im Rahmen dieses Versuchs nur die Fourier-Transformation und -Filterung interessiert. Details zum Programm, zum Download und zur Installation finden Sie auf der Homepage <http://gwyddion.net/>.

A.1 Fourier-Filterung mit Gwyddion

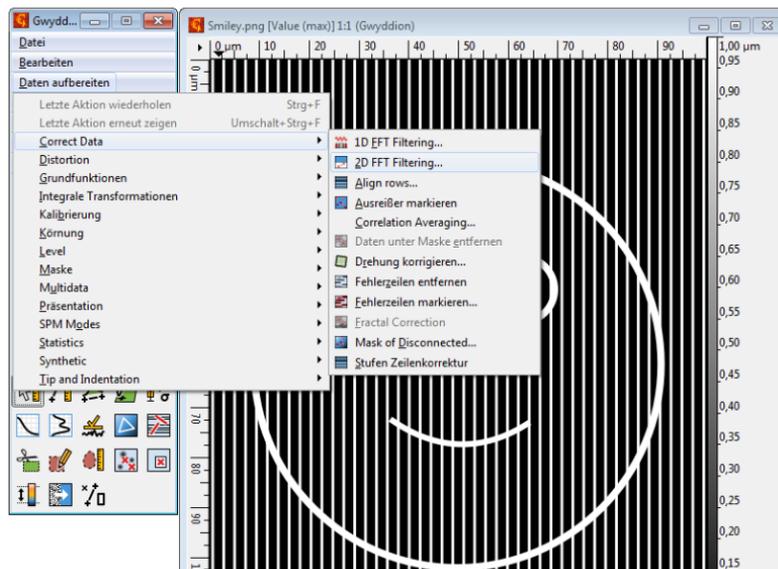


Abbildung A.1: Oberfläche des Programms Gwyddion.

So führen Sie mit Gwyddion eine Fourier-Filterung durch:

- Installieren und öffnen Sie das Programm Gwyddion.
- Laden Sie das zu filternde Bild (**Datei > Öffnen**). Das Programm arbeitet nur in Graustufen; ggf. müssen Sie Ihr Bild mit einem anderen Programm (z.B. GIMP) in Graustufen umwandeln.
- Das zu filternde Bild muss das aktive Fenster sein (im Zweifel auf das Fenster klicken), bevor Sie die Fourier-Filterung durchführen können: **Daten aufbereiten > Correct Data > 2D FFT Filtering** (siehe Abbildung A.1).
- Es öffnet sich das Fenster „2D FFT Filterung“, indem Sie links bereits die Fourier-Transformation des ausgewählten Bildes sehen (siehe Abbildung A.2). Auf der rechten Seite sind verschiedene Optionen unter drei Unterschriften gruppiert: Filtermaske, Vorschau-Optionen, Ausgabe-Optionen. Die beiden Gruppen mit Optionen sind relativ selbsterklärend. Im Bereich „Filtermaske“ wählen Sie den gewünschten Fourier-Filter aus.
- Zur Auswahl des Fourier-Filters:
 - Niedrige Raumfrequenzen sind in der Mitte des Fourier-Bildes dargestellt, hohe an den Rändern.
 - Alles was im linken Fenster orange überdeckt ist, gilt als ausgewählt und wird zur Rücktransformation verwendet; d.h. unmarkierte Flächen im Fourier-Bild werden herausgefiltert.
 - Mit den vier Werkzeugen im Bereich „Filtermaske“ können Sie orange Flächen erstellen oder Löcher in solche schneiden.
 - Die Werkzeuge sind stets punktsymmetrisch, d.h. Sie können bspw. nicht einfach ein einzelnes Loch in eine Ecke schneiden.
 - Löcher können Sie nur in bestehende Flächen schneiden; für einen Hochpass müssen Sie also zunächst mit der Fläche „Ausfüllen“ die gesamte Fläche orange einfärben.
- Nach der Auswahl des gewünschten Filters wird die Filterung durch Klicken auf „OK“ durchgeführt; je nach gewählten Ausgabe-Optionen gehen nun bis zu drei Fenster auf.

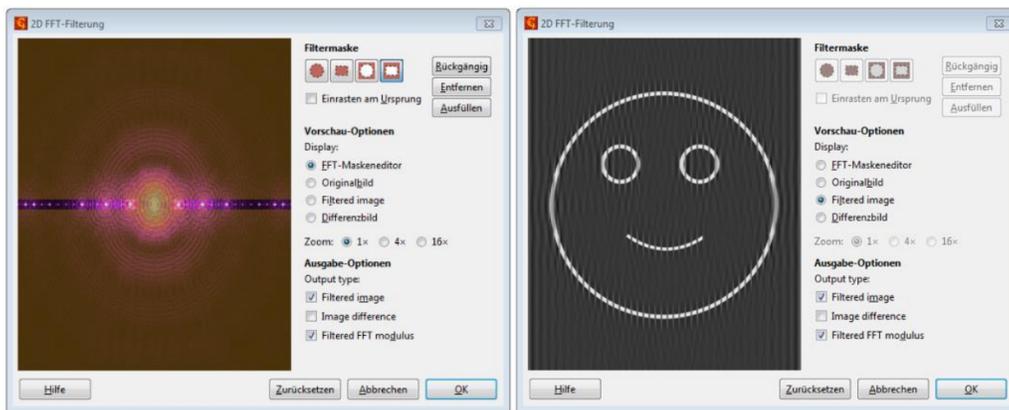


Abbildung A.2: Das Fenster „2D FFT Filterung“ im Programm Gwyddion.

Anhang B

zur Fourier-Transformation

B.1 Amplitude und Phase bei der Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}(u, v)$, ist nach der Darstellung in Gleichung (2.7) eine komplexe Zahl. Bei der Interpretation sind wir bisher meist nur auf deren Amplitude eingegangen und haben dabei die darin steckende Phaseninformation weitgehend vernachlässigt.¹ Bei der Betrachtung des Fourier-Bilds im Experiment nehmen wir auch nur die Amplitude wahr, die aber nur einen Teil der Informationen über das ursprüngliche Bild enthält. Abbildung B.1 veranschaulicht, welcher beträchtliche Teil der Bildinformation in der Phase der Fourier-Transformierten liegt.

Bemerkenswert zur Verdeutlichung der Relevanz der Phaseninformation ist auch die in Abschnitt 5 gezeigte Beschreibung der Bündelungswirkung einer Sammellinse nur durch die Phasenmanipulation des hindurchtretenden Lichts. Die Manipulation kommt dadurch zu stande, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Glas geringer ist als in Luft und das Licht in der Nähe der optischen Achse durch mehr Glas hindurch muss, als weiter entfernt davon.

¹In Abschnitt 2.1 wurde die Fourier-Transformation durch Sinus- und Cosinussschwingungen dargestellt. Die Phaseninformation steckt in dieser Darstellung in der relativen Größe des Sinus-Koeffizienten zum Cosinus-Koeffizienten.

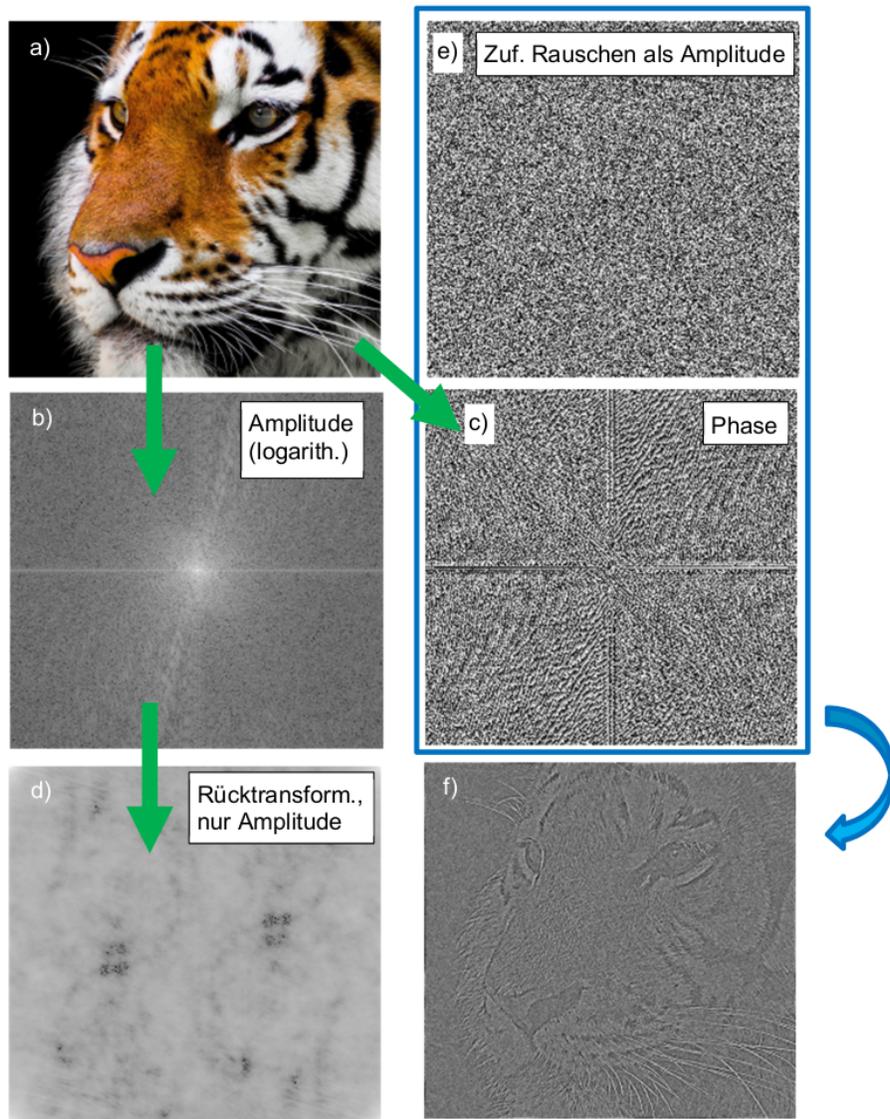


Abbildung B.1: Zur Illustration der Relevanz der Phaseninformation bei der Fourier-Transformation anhand eines Beispiel-Bildes (a). (b) ist die Amplitude der zugehörigen Fourier-Transformation [in S/W], (c) die Phase. Wird nur (b) [mit identischer Phase für alle Frequenzen] zur Rücktransformation verwendet, ist das Bild nicht wieder zu erkennen (d). Wird nur (c) [mit zufälliger Amplitude (e)] zur Rücktransformation verwendet, ergibt sich (f). Die Konturen des Tiges aus (a) sind dabei klar erkennbar. Die Graphik wurde aus (Thorlabs, 2020) übernommen.

Anhang C

zur Bildbearbeitung

C.1 Muster-Erkennung mit der Fourier-Transformation

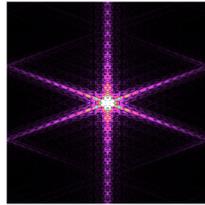
Die Fourier-Transformation hat einige Eigenschaften, die bei der automatisierten Muster- oder Schrift-Erkennung nützlich sind. Die Fourier-Transformierte eines Musters ist quasi unabhängig davon, an welcher Stelle im Bild das Muster auftaucht (siehe Abbildung C.1), was eine einfache automatisierte Erkennung bekannter Muster ermöglicht, unabhängig davon wo sie im Bild auftreten. Hat man andererseits einen gescannten Text bereits in Segmente einzelner Buchstaben zerlegt, kann die Fourier-Transformation dabei helfen auch bei schwer lesbaren Handschriften auszumachen, welcher Buchstabe sich in welchem Segment befindet. Abbildung C.2 zeigt beispielhaft, wie gleiche Buchstaben sich im Frequenzraum unabhängig von der Schrift ähneln und gleichzeitig von anderen Buchstaben unterscheiden.



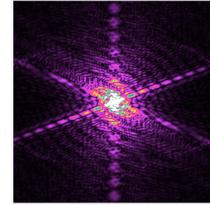
(a) Der Buchstabe A, zentriert.

(b) Der Buchstabe A, oben links.

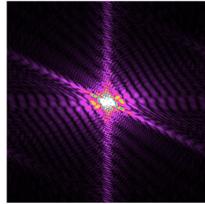
Abbildung C.1: Zur Mustererkennung mit der Fourier-Transformation. Unabhängig davon, an welcher Stelle im Bild sich ein spezielles Muster befindet (hier: der Buchstabe A), sieht die Fourier-Transformation (jeweils rechts) sehr ähnlich aus. Das kann bspw. zur Muster-Erkennung in Fotos verwendet werden. Die Fourier-Transformation wurden mit Gwyddion erstellt.

A

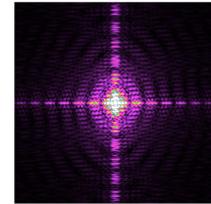
(a) A in Ubuntu Sans-serif

A

(b) A in English Towne

A

(c) A in Kool Beans

B

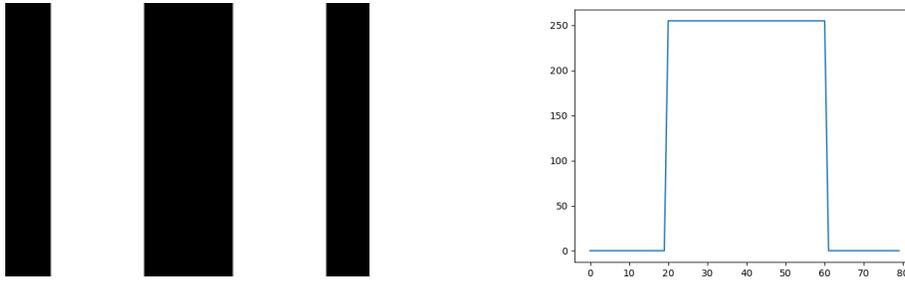
(d) B in Ubuntu Sans-serif

Abbildung C.2: (a)-(c): Derselbe Buchstabe in verschiedenen Schriftarten. Die Fourier-Transformation (jeweils rechts) sieht stets ähnlich aus. (d): Die Fourier-Transformation eines anderen Buchstaben unterscheidet sich deutlich. Alle Fourier-Transformationen wurden mit Gwyddion erstellt.

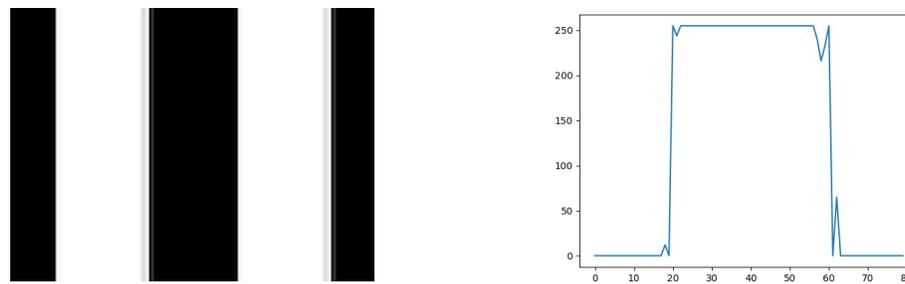
C.2 Kompression mit der Fourier-Transformation

Ebenso wie die Fourier-Transformation (bzw. verwandte Rechenverfahren) im `mp3`-Format eingesetzt wird, um Musikdateien zu komprimieren, wird sie auch im `jpeg`-Format eingesetzt, um Bilder zu komprimieren. Zunächst wird die zu komprimierende Datei Fourier-transformiert, wobei noch keine Informationen verloren gehen. Zur Einsparung von Speicherplatz wird nun die Information im Frequenzraum reduziert. Insbesondere im Bereich hoher Raumfrequenzen werden Informationen reduziert, da das menschliche Auge für Details in sehr feinen Strukturen deutlich weniger empfindlich ist, als für den Gesamteindruck größerer Gebiete.¹ Gerade wegen des Informationsverlusts im Bereich hoher Frequenzen können bei extremer Kompression von Bildern mit scharfen Kanten allerdings Artefakte auftauchen, die an das Gibbsche Phänomen erinnern, wie in Abbildung C.3 zu sehen ist.

¹Mehr zum jpeg-Algorithmus findet sich z.B. unter (Wikipedia, 2021b) oder (Wikipedia, 2021c).



(a) Ausschnitt aus einem Liniengitter, Original mit 921,7 kB.



(b) Ausschnitt aus einem Liniengitter, jpg-komprimiert auf 8,7 kB.

Abbildung C.3: Die jpg-Kompression anhand des Liniengitters aus Abbildung 2.2. Links ist ein Ausschnitt aus dem Gitter zu sehen, rechts ein Ausschnitt aus dem Helligkeitsprofil, horizontal über einen hellen Streifen des Gitters. Im Original (a) sind die Gitterlinien rechteckige Strukturen; nach extremer Kompression (b) sind im Bild Artefakte zu sehen, die an das Gibbsche Phänomen erinnern; ein Indiz für eine abgebrochene Fourier-Reihe.

Literaturverzeichnis

- [Demtröder 2013] DEMTRÖDER, Wolfgang: Interferenz, Beugung und Streuung. In: *Experimentalphysik 2*. Springer, 2013, S. 299–345
- [Goodman 2005] GOODMAN, Joseph W.: *Introduction to Fourier optics*. 3. ed. Englewood, Colo. : Roberts, 2005. – ISBN 0974707724; 9780974707723
- [Hecht und Zajac 1974] HECHT, E ; ZAJAC, A: Diffraction. In: *Optics*. Addison-Wesley Publishing Co, 1974, S. 329–396
- [Necas und Klapetek 2021] NECAS, David ; K LAPETEK, Petr: *Gwyddion — Free SPM data analysis software*. <http://gwyddion.net/>. 2021. – [Online; accessed 20-October-2021]
- [Sanderson 2018] SANDERSON, Grant: *But what is the Fourier Transform? A visual introduction*. <https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY>. 2018. – [Online; accessed 20-October-2021]
- [Thorlabs 2020] THORLABS: *EDU-FOP2/M Fourier-Optik Kit Handbuch*. Rev. A. europe@thorlabs.com: , 06 2020
- [Vleggaar 2020] VLEGG AAR, Jeroen: *Fourier Optics used for Optical Pattern Recognition*. <https://www.youtube.com/watch?v=Y9FZ4igNxNA>. 2020. – [Online; accessed 19-October-2021]
- [Wikipedia 2021a] WIKIPEDIA: *Babinetsches Prinzip — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. https://de.wikipedia.org/wiki/Babinetsches_Prinzip. 2021. – [Online; accessed 19-October-2021]
- [Wikipedia 2021b] WIKIPEDIA: *JPEG — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. https://de.wikipedia.org/wiki/JPEG#Die_JPEG-Komprimierung. 2021. – [Online; accessed 20-October-2021]
- [Wikipedia 2021c] WIKIPEDIA: *JPEG — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/JPEG#JPEG_compression. 2021. – [Online; accessed 20-October-2021]